La enseñanza de la matemática y la formación del pensamiento

Un estudio sobre la demostración en el nivel medio

Autor:
Chemello, Graciela
Tutor:
Camilloni, Alicia W. de

2002

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Magister de la Universidad de Buenos Aires en Didáctica

Posgrado

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO

Un estudio sobre la demostración en el nivel medio.

Prof. Graciela Chemello

Directoras de Tesis:

Dra. Alicia Camilloni

Dra. Liliana Gysin

Tesis de Maestría en Didáctica

Departamento de Ciencias de la Educación

Facultad de Filosofía y Letras

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Buenos Aires, Febrero de 2002

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO DEL ESTUDIANTE

Un estudio sobre la demostración en el nivel medio.

Prof. Graciela Chemello

Directora de Tesis:

Dra. Liliana Gysin

Tesis de Maestría en Didáctica
Departamento de Ciencias de la Educación
Facultad de Filosofía y Letras
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Buenos Aires, Febrero de 2002

TEsis 12-5-10

INDICE

Tesis 12-5-10

Quiero dedicar esta tesis a mis hijos, Jimena y Alejandro, porque con ellos aprendo algo nuevo cada día; a mis padres, Carmen y Atilio, porque me enseñaron a trabajar con empeño y dedicación, y sobre el amor puesto en lo que se hace cada día y en aquellos con quienes se comparte; a mis hermanos, María del Carmen y Atilio, porque nos unen lazos profundos que nos hacen ser tolerantes con las diferencias, a Pilar Pozner, por la hermandad del corazón, el aprendizaje compartido y su aporte lúcido en el envión final.

1. INTRODUCCION

El presente trabajo es un estudio e investigación sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media, y específicamente se propone aportar para ampliar la comprensión de la enseñanza de la demostración en los últimos 50 años en la Argentina.

Una enseñanza media que intenta ser para todos y universal, no puede mantenerse solo en los discursos y declaraciones, sino que esta preocupación tiene que atravesar a todo el sistema educativo y sus actores. Universalizar la enseñanza media implica también volver a pensar cómo enseñar a pensar, así como revisar qué estrategias son más potentes para potenciar el *aprender a aprender* a lo largo de toda la vida. Enseñar a utilizar los distintos procedimientos y herramientas de las disciplinas y a reconocer su potencia heurística es sin duda una de las deudas más relevantes de las didácticas cuando se piensa en el conocimiento que deben adquirir los estudiantes para ser usado fuera de la escuela.

En este sentido, los objetivos fundamentales de este trabajo se inscriben dentro de las actuales preocupaciones de aportar al desarrollo y adecuación de la enseñanza de nivel medio, en su primer ciclo, a una significativa formación del *pensamiento de los jóvenes* que asisten y acceden a este nivel, hoy obligatorio en una gran parte de los países latinoamericanos. Y muy particularmente, se dedica a indagar sobre si se utilizó y cómo la enseñanza de la demostración como herramienta de conformación de las propias capacidades cognitivas, a lo largo de cincuenta años.

Así, para ello retoma en su marco teórico, las investigaciones en Didáctica de la Matemática y los conocimientos por ella producidos, para analizar el sentido dado a esta enseñanza, y se inscribe en el marco de una preocupación más general, como es la potencial contribución de la enseñanza de la Matemática a la formación del pensamiento de los adolescentes, en sus aspectos relacionados con la constitución del pensamiento racional. En la selección y recorte de este problema, se podrían haber considerado diferentes aspectos de interés desde el punto de vista didáctico, entre los cuales pueden incluirse los siguientes interrogantes: ¿cuáles son las aproximaciones cognitivas de los alumnos a la demostración y sus razonamientos espontáneos?, ¿cuáles son las estrategias de los profesores al enseñarla?, o ¿cuáles son los rasgos que la caracterizan como objeto de enseñanza?. Este trabajo se ubica esta última perspectiva, es decir considerándola como una construcción didáctica realizada a partir del conocimiento disciplinar de referencia, la Matemática, en el marco teórico más general de la Teoría de la transposición didáctica, y su ampliación, la antropología de los saberes.

La construcción didáctica a la que se hace referencia implica un proceso de transposición que se desarrolla en dos etapas: la primera es aquella en la que el objeto de la ciencia es "preparado" para su entrada al sistema de enseñanza y transformado en un objeto para ser enseñado; la segunda es la que ocurre dentro del propio sistema cuando cada profesor en cada institución toma un programa, un diseño curricular, un texto, y lo transforma en objeto enseñado y eventualmente aprendido.

Este estudio recorta ese proceso y toma *sólo su primera etapa:* Intenta determinar cuáles son los rasgos generales que ha asumido este objeto en la presentación a los profesores en tanto interlocutores de la primera etapa de la transposición, e indagar qué lugar tiene como parte del conjunto de conocimientos de quienes son responsables de enseñar.

El pensamiento racional como capacidad humana que la educación formal tiene la oportunidad de desarrollar sirve como todo pensamiento a los fines del propio conocimiento, y se asocia al razonamiento. Este término, razonamiento, suele designar tanto la actividad intelectual de manipulación de información para producir nuevas informaciones a partir de los datos, como el conjunto de enunciados articulados son su producto final. Suele usarse con más precisión el término "razonamiento heurístico" para la actividad intelectual.

Por otra parte, al considerar la actividad de producción de conocimientos científicos y la necesidad de validar los resultados obtenidos, la demostración aparece como una *herramienta* esencial para la Matemática, pues es la aceptada por la comunidad para probar la validez de resultados. Es el procedimiento de validación – con diferentes características a lo largo de la historia – propio de esta ciencia, es lo que diferencia a la Matemática de las ciencias experimentales.

Entre las razones que signaron el presente estudio, se encuentra la ausencia de trabajos realizados en la Argentina con este enfoque, detectada al explorar los antecedentes del problema, con lo que resulta oportuno y significativo dedicarse al mismo.

El problema estudiado tiene relevancia cuando se piensa en la enseñanza de la disciplina, pues no se aprende realmente Matemática si no se adquiere una idea sobre las formas de validación que funcionan en ella. Hay coincidencia hoy, entre quienes piensan la enseñanza de diferentes dominios, respecto de que, enseñar una disciplina es enseñar su cultura, es decir, los modos de hacer, comunicar y pensar propios de ella. Y también hay coincidencia respecto de que la cultura matemática que un sujeto aprende está asociada a las prácticas que ha desarrollado a propósito de ella.

Por otra parte, comprender el sentido que ha tenido y tiene la enseñanza de la demostración, permitirá mejorar el diseño de estrategias que contribuyan a la formación del pensamiento racional en todos los alumnos, ya que, aunque sabemos que no sólo la Matemática tiene posibilidades de aportar a esta formación, ocupa en ella sin duda, un lugar privilegiado.

La metodología de investigación en ciencias sociales, está edificada sobre la polémica entre dos tradiciones. Por un lado la aristotélica, para la cual la ciencia es "un camino inductivo desde las observaciones hasta los principios generales o principios explicativos", y según la cual la explicación científica puede ser expresada en términos de explicación causal. Por otro lado, la más ligada a Galileo, para la que la explicación científica pueden ser expresada en términos de explicación teleológica, o comprensión. (MARDONES, 1999: 32).

Considerando que existe una realidad "exterior" al discurso que puede ser conocida, y dado el carácter del problema, la metodología elegida para abordarlo fue cualitativa. Su lógica ha sido la de operar en forma intensiva estudiando pocos casos en profundidad, con un movimiento en espiral, de ida y vuelta entre la teoría y la empiria. El interjuego entre ambas, permitió ir construyendo interpretaciones para pasar de categorías más pegadas a la empiria a conceptos más abstractos.

Esta decisión, también está fundamentada en los antecedentes metodológicos de este trabajo, pues las investigaciones que se han revisado sobre el modo en que otros conocimientos disciplinares son estudiados como objeto de enseñanza, son de tipo cualitativo.

El universo de la demostración fue estudiado a través de la recolección y el análisis de diferentes materiales escritos, con fechas de publicación a partir de 1950. Por una parte, los libros escolares asociados a diferentes programas editados y usados en las escuelas en el período elegido. Por otra parte, los documentos reguladores de la enseñanza que llegaban a los colegios e institutos, como los programas de estudio de Matemática, las circulares o resoluciones, contenidos de materias o ciclos de enseñanza, boletines y otras publicaciones oficiales y de enseñanza privada, y los libros de educadores matemáticos prestigiosos, cuyas opiniones marcaban rumbos a los profesores.

Las unidades de análisis seleccionadas para hacer relevante la comparación entre ellas, han sido identificadas por etapas de tiempo, pues en el período estudiado ha habido diferencias significativas en muchos aspectos de la enseñanza de la matemática, que marcaron diferencias en el sentido dado a la demostración. Para cada categoría encontrada se seleccionaron los casos necesarios hasta su saturación, es decir hasta que uno nuevo no aportara información adicional significativa.

En el caso de este estudio cualitativo y de lógica inductiva, se puede considerar su validez, como una cuestión relacionada con su producción, "considerar a la producción y la validación del conocimiento como unidades entrelazadas aunque conceptualmente pueda resultar útil mantener la diferencia, pero no necesariamente de manera dualista, todo un desarrollo actual reivindica los procesos de producción del conocimiento científico y sus muchas veces estrecha conexión con la justificación." (SHUSTER)

Este trabajo se organiza en ocho capítulos. Luego de la introducción, en la primera parte del texto, la demostración es considerada *objeto de saber* en dos capítulos. En el segundo capítulo se hace un tratamiento de la demostración en relación con las nociones de *herramienta u objeto de una actividad científica*, mediante una síntesis bibliográfica organizada en dos apartados en los que se considera la demostración desde cada una de esas nociones. En el primero la toma desde sus fundamentos lógicos, es decir como objeto de la lógica matemática, en el segundo apartado avanza en un análisis histórico - epistemológico - didáctico, que permitió profundizar en el origen y evolución de esta noción tal como circula en la comunidad matemática, el sentido de la actividad de demostrar y los caracteres permanentes de la demostración.

En el tercer capítulo, se caracteriza en primer término las diferentes formas de razonamiento asociadas a distintas fases de la actividad de resolución de problemas en Matemática, para ubicar la problemática de la enseñanza de la demostración en el marco de otra más global, la de las formas de validación. Luego se describen las características de la racionalidad matemática diferenciándola de la racionalidad cotidiana, y las relaciones entre razonamiento deductivo y racionalidad, para concluir retomado las cuestiones tratadas en el capítulo 2, definiendo cuál es el lugar de la demostración en la racionalidad matemática.

En la segunda parte de este trabajo, la demostración es analizada como *objeto de enseñanza*. El cuarto capítulo se dedica a explicitar los análisis e interpretaciones realizados, considerando las textualizaciones del saber que se realizan para su entrada al sistema de enseñanza (entendiendo que la puesta en texto plantea límites a la posibilidad de conocer la demostración como objeto para ser enseñado pues "ningún texto del saber contiene todo el saber a enseñar"), qué límites se establecen en este estudio entre ambas etapas del proceso de transposición didáctica, y los fenómenos ligados a la preparación didáctica. Los análisis comparativos por períodos se realizan tanto en relación con las que denominamos orientaciones regulatorias del sistema de enseñanza, como en función de libros de matemáticos influyentes. De tal modo se analiza la evolución de la enseñanza demostración desde los enfoques de 1956 cuando se intenta un acercamiento entre las posturas racionalista e intuicionista hasta la reforma de 1994 con la inclusión de los "procedimientos ligados al quehacer matemático" como contenido de enseñanza.

En el quinto capítulo se realiza una presentación histórica descriptiva y analítica de aquellos libros de texto a los que accedieron los estudiantes de los distintos períodos, y que fueran paradigmáticos en cada uno de ellos.

Por último, a modo de conclusiones o más bien epílogo se plantean en el capítulo seis algunas orientaciones relativas a los diversos actores del sistema de la enseñanza y que son por sí mismas son de carácter propositivo. Las mismas, plantean posibles líneas de acción, nuevas preguntas para la investigación y por ello aunque son conclusiones, no dejan de ser provisorias y plantear nuevos problemas. Si tienen alguna utilidad, se habrá cumplido la intención central de este trabajo: aportar a la comprensión y generar ideas para actuar sobre la enseñanza de la matemática con jóvenes adolescentes en su educación media en relación con la formación de sus estrategias de pensamiento.

Finalmente en el capítulo siete, se presenta la bibliografía que es agrupada según los siguientes criterios. En el primer apartado, se reúnen los aportes para la revisión de nociones lógicas y matemáticas, y el conocimiento de nuevos aspectos de la historia de la matemática y de la historia de la noción de demostración; así como el conocimiento ligado a las nociones de sociogénesis de los conocimientos, y la evolución de las teorías científica

En el segundo apartado, se circunscribe a los libros de base del marco teórico didáctico elegido, los que fueron revisados focalizando en el problema, tanto sobre los fundamentos y métodos de la DM, la transposición y su evolución como teoría didáctica, sobre la validación y la racionalidad en Matemática, y las nociones de herramienta y objeto. También los libros que aportan a las concepciones que circularon en distintos momentos sobre la matemática y su enseñanza, y sobre el curriculum de matemática.

El apartado 7.3., incluye estudios de diverso tipo sobre la misma noción de demostración, textos ligados a su enseñanza, ensayos didácticos e investigaciones sobre su aprendizaje, sobre su inclusión en textos, su presencia en el curriculum.

En el siguiente apartado se incluyen los textos para estudiantes de educación para diferentes épocas, modalidades, cursos, años, así como de diversos autores.

En el apartado 7.5. se encuentran los documentos regulatorios de la enseñanza, en los se incluyen tanto documentos oficiales como de la enseñanza privada y publicaciones periódicas de uso habitual en las escuelas; en ellos se presentan entre otras cuestiones, contenidos, objetivos, sugerencias de planificación, propósitos de la enseñanza y formas de evaluación. Por último, en el apartado 7.6., se incorporan las lecturas relativas a la misma metodología de la investigación.

Los anexos que se incluyen en el capitulo ocho, incluyen los capítulos de los cuatro textos emblemáticos estudiados, y el quinto de transición, que incorporan todo su peso histórico, y sin los cuales este estudio no hubiera sido ni posible.

Por último quiero expresar mi agradecimiento a quienes colaboraron en este trabajo, Lili Gysin que me acompañó con su solvencia académica, su claridad, y su aliento en cada tropiezo, mis colegas y amigos, Ana Lía Crippa, Mónica Agrasar, Gustavo Barallobres y Silvia Chara, qüe ayudaron con sus señalamientos sagaces y su apoyo cariñoso, compañeros de la aventura de trabajar comprometidamente en estos tiempos creyendo aún en los lazos solidarios y en que la educación mejora al hombre y es un derecho de todos. Asimismo a la Dra. Alicia Camilloni que aceptó compartir con su solidez en una disciplina tan relevante en este tiempo como es la Didáctica.

PARTE I: SOBRE LA DEMOSTRACIÓN

2. LA DEMOSTRACIÓN COMO OBJETO Y COMO HERRAMIENTA

Con este capítulo se comienza a introducir la demostración analizada como objeto de saber. Al definir los objetos de saber de la ciencia, Chevallard diferencia las nociones matemáticas de las que denomina paramatemáticas en tanto objeto o herramienta[1] refiriéndolas a una práctica precisa. Pone a la demostración como ejemplo de "noción paramatemática", explicando que denomina de este modo a las nociones que son herramientas de la actividad matemática, pero que normalmente no son objetos de estudio del matemático. En cambio, las "nociones matemáticas" como la de número, son objeto de estudio y también son (o pueden ser) herramientas de estudio. La noción de demostración, es objeto de estudio de la lógica matemática, pero no de la Matemática. Es la modelización de la práctica estudiada en el marco de la lógica considerada como ciencia de los métodos.

Tomando esta cuestión, como este trabajo se refiere a la demostración en la enseñanza de la matemática en la escuela media, recurrimos a la lógica para analizar la demostración como objeto de la lógica matemática en el primer apartado y luego la tomaremos como herramienta de la actividad matemática en el segundo apartado.

La demostración como objeto de la lógica

La exploración de los fundamentos lógicos de la demostración, y la necesidad de aclarar la noción *de razonamiento deductivo*, ha permitido precisar el significado de otros términos que intervienen en la noción de demostración:

- El término razonamiento, que como se anticipó en la Introducción tiene dos acepciones, se define en lógica más precisamente como el conjunto de proposiciones en el que una de ellas llamada conclusión, se pretende que esté fundada o se infiera de las otras llamadas premisas.
- Entre los razonamientos, se denominan deductivos a aquéllos en los que la conclusión se infiere en forma necesaria de las premisas.

[1] Las nociones de objeto y herramienta suelen usarse también en Didáctica de la matemática, luego de que Douady las introduce para marcar la diferencia entre dos status en el funcionamiento de un conocimiento en la actividad matemática escolar. Sin embargo, entendemos que el sentido en que usa estos términos Chevallard es diferente, pues se trata del funcionamiento de un conocimiento en relación con una práctica científica.

- Un razonamiento es válido cuando no hay ningún razonamiento de esa forma que tenga premisas verdaderas y conclusión falsa.

Los llamados razonamientos deductivos reciben su validez de los grandes principios lógicos: identidad, contradicción, tercero excluido y razón suficiente (ROMERO – PUCCIARELLI, 1952: 82), que se pueden enunciar del siguiente modo:

- Identidad; todo objeto es idéntico a sí mismo
- Contradicción: no pueden ser verdaderos simultáneamente "S es P" y "S es no P"
- Tercero excluido o disyunción contradictoria: S es P o S es no P, o lo que es lo mismo S es necesariamente P o no P
- Razón suficiente: Por razón de un juicio ha de entenderse lo que es capaz de abonar lo enunciado en el juicio, es suficiente cuando no hace falta nada más para que el juicio sea plenamente verdadero (este principio no es totalmente lógico pues se refiere a la verdad que es un problema gnoseológico)

El hecho de que en los razonamientos deductivos la conclusión se infiere en forma necesaria de las premisas, es lo que permite utilizarlo para construir lo que en matemática llamamos "resultados". La demostración de un juicio (o resultado) consiste en deducirlo silogísticamente de otros juicios reconocidos como ciertos.

Los elementos primarios del razonamiento matemático son los axiomas (ROMERO – PUCCIARELLI, 1952: 160), junto a las definiciones y nociones básicas. Se diferencian de las premisas en ser los primeros, anteriores a ellas en el orden deductivo. (PUYAU – ROETTI, 1976: 34) Los axiomas, son verdades indiscutibles, evidentes por sí y sin necesidad de ulterior fundamentación. En cuanto a la evidencia de los axiomas, hay diferencias entre la mirada anterior a las geometrías no euclidianas pues la geometría pretendía ser una modelización del espacio físico, y los axiomas en un sistema formal que se eligen como punto de partida sin atenerse a una necesidad de modelización.

Además, la demostración matemática se diferencia del silogismo lógico en que tiene por lo común más de tres juicios y en que emplea frecuente de la igualación. La igualación, al establecer la equivalencia de dos términos, permite sustituir uno por otro.

Para poder afirmar que un resultado es cierto necesitamos entonces un *Teorema* (afirmación lógica "p⇒q", donde p se llama la hipótesis y q la tesis), la validez de p (que habrá sido la conclusión de algún teorema previo) y la demostración de la implicación lógica.

Intervienen una hipótesis (p) y una tesis (q), relacionadas por el condicional a través de uno o más pasos, es decir que si se admite p entonces de ello se deriva necesariamente q, decimos "si p entonces q", en símbolos p⇒q. La tabla de verdad del condicional tiene cuatro posibilidades (VV, VF, FV y FF), de las cuales tres son verdaderas (VV, FV y FF). Como en Matemática partimos siempre de afirmaciones V, la validez de la implicación equivale a la validez de la tesis. Por lo tanto toda demostración de una implicación, que parte de premisas verdaderas, es al mismo tiempo la demostración de la conclusión a la que se arribe.

Desde el punto de vista lógico, además de la demostración directa, en que se parte de las premisas llegando por condicionales verdaderos sucesivos a la conclusión, queremos mencionar dos tipos particulares de demostraciones.

Una es la conocida como "demostración por inducción completa", que sirve para validar un resultado para todos los número naturales. Para Poincaré, éste es "el método propio de la Matemática", cuyo carácter esencial es que contiene en sí, condensados en una fórmula única, una infinidad de silogismos. Se procede del siguiente modo: "se establece primero la validez del teorema para el número 1, se demuestra en seguida que si es verdad para n-1, lo es para n". Esto permite concluir que el teorema es verdad para todos los números naturales" (ROMERO – PUCCIARELLI, 1952: 164).

Otro caso particular es el de las "demostraciones por el absurdo". En estas demostraciones se utiliza una equivalencia lógica, a saber, "p⇒q" equivalente con "p y q" , sabiendo que p es V, que es equivalente a su vez a probar que "p y no q" es F (siempre sabiendo que p es

V). Se parte entonces de postular la negación de la tesis y tomado en consideración la hipótesis se trata de arribar a una contradicción. Si esto ocurre, se puede concluir que la tesis es verdadera.
Por otro lado, la marcha del razonamiento en la actividad intelectual de quien piensa, lo que hemos denominado en la introducción "razonamiento heurístico", puede ser sintética o progresiva, cuando se parte de relaciones conocidas y se extrae de ellas la tesis, o analítica o regresiva, cuando se parte de la tesis que debe ser demostrada.

- En el procedimiento sintético se supone ya conocido el desarrollo lógico ideal en la dirección precisa que conviene para llegar al fin propuesto. No es por lo tanto un método de indagación, de descubrimiento.
- En el procedimiento analítico se considera tanto la relación entre lo conocido y lo que se busca como el concepto de esto último como hipotéticamente válidos, y a partir de este supuesto y con auxilio, por otra parte, de relaciones conocidas, se tiende una cadena de juicios cuyo último miembro presenta como condición de su validez una exigencia que se puede cumplir mediante la aplicación de postulados conocidos o de problemas ya resueltos. El proceso analítico es una indagación, un tanteo, y que al lograrse da lugar por reversibilidad al proceso inverso, sintético que es el efectivamente demostrativo.

Para separar en rigor la marcha sintética de la analítica, es importante comprender la diferencia del papel que desempeña en cada una la tesis al comienzo del proceso. En el proceso sintético, la tesis está presente como la meta del raciocinio, pero no se razona a partir de ella. En cambio, en el proceso analítico, la tesis que se procura probar se convierte en efectivo punto de partida.

Los aspectos considerados tanto respecto del razonamiento como de la demostración, son conocimientos que el matemático tiene y subyacen a su práctica de producción de conocimientos, que incluye la demostración de resultados. Sin embargo, así como caminamos sin preguntarnos cómo ni por qué se camina, los matemáticos demuestran sin preguntarse por su hacer en períodos normales (en el sentido de KHUN) de crecimiento de su ciencia. Sólo cuando algún problema conmueve a la comunidad, surgen preguntas que pueden poner en tela de juicio también el hacer, y eventualmente discutir acerca de los fundamentos de la demostración como parte de un cuestionamiento más amplio. En el próximo apartado, centrando la demostración como parte de la actividad matemática, se desarrollan los análisis juzgados como más interesantes desde un punto de vista didáctico para los propósitos de este estudio, aportar comprensión a la enseñanza del razonamiento matemático.

La demostración como herramienta de la matemática

En este apartado, se presentarán los estudios de la demostración como el instrumento de prueba aceptado por la comunidad matemática. Para estudiar esta cuestión se ha recurrido a trabajos en los que confluyen miradas de diferente tipo. Son epistemológicos (en el sentido de Lakatos[2]) porque sitúan los problemas ligados al conocimiento en la cultura de la comunidad matemática en diferentes épocas y sociedades, tomando en consideración a los actores, los debates, y demás factores que intervienen en su producción, y de validación, sus continuidades y rupturas. Son didácticos porque el propósito de los autores es iluminar el contexto de producción para obtener alguna pista interesante para pensar la enseñanza.

Los trabajos estudiados han permitido conocer algunos elementos de la demostración, tal como circula y ha circulado en la comunidad matemática. Esto tiene un valor para este trabajo, y una limitación.

El valor es que enriqueció la mirada didáctica al acceder en parte, a la complejidad de este objeto de saber, ya que los trabajos revisados, producciones escritas de comentadores y protagonistas, implican una versión diferente de la textualizada elaborada para su entrada en los profesorados. La fecundidad del análisis histórico epistemológico, reside en que permite tener en cuenta las características del conocimiento en cuestión desde el momento en que empieza a explicitarse o en que es posible reconocer su uso, relacionado con las problemáticas a las que está ligado, y con las que han permiten su evolución.

La limitación es que, la realización de estudios de este tipo no modifica la práctica matemática y por lo tanto la concepción sobre este objeto de saber. Esta concepción, según el enfoque aquí elegido, está determinada por los diferentes tipos de actividades

[2] La filosofía de la ciencia sin la historia es ciega

desarrolladas en relación con el objeto. En este sentido, se señala que la práctica[3] matemática de demostrar de la mayoría de los profesores ha estado mediada por instituciones educativas y desvinculada de la producción de saber en la comunidad, lo que recorta el sentido atribuido a este procedimiento.

Conviene aclarar que no se realizó esta tarea con la ilusión de trasladar a la enseñanza el funcionamiento del conocimiento en la comunidad científica, pues aún cuando se instale un contrato de producción de conocimientos, los contextos son muy diferentes: las problemáticas de los sujetos, sus conocimientos e intereses, etc. La idea en cambio ha sido acceder a la complejidad de la construcción de la noción de demostración por parte de quien aprende.

De tal modo, se puede pensar cómo hacer vivir en la escuela objetos complejos para alumnos que no tienen los conocimientos para resolver los problemas originales, y cómo hacer para que incorporen como herramienta de su actividad en el aula las de la actividad matemática. También es posible pensar, con los condicionamientos que impone el sistema de enseñanza, qué elementos destacar y qué textualizaciones realizar en las indicaciones curriculares, libros de texto para profesores y para los alumnos de modo de facilitar a los profesores la aprehensión del sentido de la demostración y con qué mediaciones hacérselas llegar teniendo en cuenta la diversidad de su relación con el saber.

- Los trabajos considerados, han posibilitado revisar diferentes aspectos sobre la demostración como marco de análisis de la enseñanza, y han permitido organizarlos para nuestro estudio en los siguientes apartados:
- su origen y antecedentes en la antigua Grecia como instrumento más general para probar la verdad asociada a la revolución de la irracionalidad,, y a un cambio de status en los objetos de la matemática.
- el sentido que tuvo en los diferentes contextos sociohistóricos de producción la actividad de demostrar, los problemas que preocupaban a la comunidad en el momento en que aparecen ciertas demostraciones, y las formas de resolver – o no –

[3] Práctica en el sentido de Douady en Relación enseñanza aprendizaje Dialéctica HO y Juego de marcos, "llamaremos práctica a todo uso adaptado de conceptos matemáticos como instrumentos implícitos o explícitos en los diversos problemas que permite resolver", extendido al uso de procedimientos propios de la cultura matemática. El sentido construido en relación con un concepto (o procedimiento) matemático está dado por las prácticas que se pueden asociar a él.

los problemas planteados que se encontraron en función de los conocimientos disponibles y concebibles.

- los caracteres cambiantes y los permanentes de la demostración a lo largo de la historia, su forma discursiva inicial (con una cierta estructura lógica, y una escritura como un tipo de texto que utiliza ciertos símbolos y reglas), y sus cambios de forma asociados a nuevos marcos epistémicos (nuevos objetos –marcos conceptuales-, nuevas reglas, etc.).

El origen de la demostración

Entre los trabajos encontrados sobre el origen de la demostración, los de Eggers Lan (1995) y Arsac (1987) permiten pensar pistas didácticas significativas.

Aunque tal origen a veces se ubica en la sistematización de Euclides por el uso de una forma deductiva de razonamiento, ambos lo señalan en la Grecia del siglo –V, y asociado a un cambio más amplio en la Matemática, dando razones para éste tanto de orden interno como externo a la disciplina. Es interesante detenerse en el análisis de cada uno.

En su libro, Eggers Lan tiene un propósito epistemológico, el de aportar al debate sobre las razones que dan origen a la matemática "científica"[4]. Al considerar si las mismas son de orden interno o externo, cita con frecuencia los trabajos de von Fritz, con quien comparte la opinión respecto de que ha habido razones de ambos tipos, por un lado "*que ha recibido fuerte estímulo de la filosofía*" y también "*ha habido ulteriores desarrollos de índole exclusivamente matemática*".

Entre los elementos que hacen pasar a la Matemática de pre-científica a científica[5], señala tres factores, dos ligados a la demostración (los métodos), uno matemático y otro filosófico, y el tercero a la preocupación por la cuestión de los irracionales (los conceptos).

Al factor matemático lo denomina "la exigencia de una prueba rigurosa en la geometría".

---

[4] con un criterio de "fecundidad histórica" para la demarcación de lo científico (Eggers Lan) que podemos asociar a la "capacidad para resolver problemas" de Laudan
con un criterio de fecundidad histórica para la demarcación de lo científico - (Eggers Lan, 1998).

Señala que otros pueblos productores de conocimientos matemáticos como los babilonios, "usaron métodos en cuya aplicación no se podía distinguir entre soluciones aproximadas o exactas, porque cada método fue desarrollado en relación con sus aplicaciones prácticas y no se podía separar de ellas para trasladarlos a otros ámbitos". (KURT VON FRITZ en EGGERS LAN). Los griegos trataron de separar los métodos de sus aplicaciones prácticas, con la finalidad de poder identificar los que fueran válidos para diferentes aplicaciones, es decir que trataron de descontextualizar los métodos de las situaciones que les dieron origen.

La idea inicial de demostración, está diferenciada de lo empírico por el intento de que el conocimiento que se enuncia sea "válido para todo" y no sólo para un caso particular Como ejemplo de su afirmación Eggers Lan cita un texto de Eudoxo en el que dice que Thales "demostró" al referirse a la explicación de un procedimiento empírico, lo que indica que una práctica ligada a mostrar en un dibujo pero que aportara un enunciado válido para todos los triángulos era aceptada como demostración (en los términos de Balacheff, como prueba).

Es decir que la necesidad de generalización en geometría los llevó a la idea, en un determinado momento, de dar a las proposiciones y los métodos una mayor fundamentación. Los llevó a la exigencia de una prueba más rigurosa.

El factor filosófico es para el autor "*la edificación axiomática deductiva*" (EGGERS LAN, 1995: 25). Eggers Lan analiza diferentes textos originales de filósofos y matemáticos griegos para determinar que la esencia y uso de la deducción, es el causal aristotélico aplicado a la matemática (EGGERS LAN, 1995: 32), "*lo que, dadas ciertas cosas, se sigue necesariamente*", y por lo tanto tiene su origen en la filosofía .
Rastrea el origen de lo deductivo en un griego no matemático como Parménides, en un poema épico dedicado a persuadir, en el que se demuestra que es lógicamente imposible lo contrario de lo que se afirma.

Entre los matemáticos ubica a Teodoro e Hipócrates. Teodoro porque mostró gráficamente o hizo aplicación de superficies, en casos donde no pudo aplicar la "epharmozein", e Hipócrates porque, para proponer su método de exhaución para el cálculo de superficies cubriendo círculos con polígonos y pasando al límite tuvo que utilizar - con un alto grado de probabilidad – una forma de razonamiento deductivo. En cuanto la presencia de la deducción en los Elementos de Euclides, señala que hay un momento de la presentación (el teorema I 35) en el que se plantea un problema que no se puede resolver con regla y compás, sino que es necesario probar la igualdad de áreas de distintas figuras. Aparece entonces una novedad radical en el desarrollo de la obra, pues no se puede avanzar más por un procedimiento empírico, hay que recurrir a lo deductivo.

Con respecto al tercer factor que motorizó el cambio en la matemática, Eggers Lan señala que también implicó la necesidad de independizar los razonamientos de la experiencia al plantearse el problema de los irracionales, y entonces "partir en sus razonamientos de principios deductivos". En la búsqueda de pautas para la argumentación sistematizaron la fundamentación axiomática de los razonamientos matemáticos.

> *"Y tal vez esa organización sistemática no haya existido hasta que Teeteto y Eudoxo con los trabajos sobre líneas irracionales y con la teoría de la proporción permitieron domeñar matemáticamente el ámbito de la irracionalidad".* (EGGERS LAN, 1995: 42)

Tienen relevancia sintetizar del trabajo de Eggers Lan las siguientes conclusiones:

- El afán de generalización propio de los matemáticos griegos ligado a la idea de rigurosidad estuvo en el origen de la demostración.
- Lo deductivo de la demostración, la idea de necesariedad, tiene raíz filosófica pues está en relación con el causal aristotélico.
- La posibilidad de partir en los razonamientos de principios axiomáticos, estuvo ligada a un cambio más amplio que incluyó la posibilidad de tratar matemáticamente la irracionalidad numérica.

En cuanto al trabajo de Arsac, éste tiene el propósito de analizar la historia para buscar pistas en relación con la enseñanza de la demostración, y por ello lo califica como un trabajo de epistemología didáctica. Parte de considerar la demostración como un tipo particular de prueba y ésta como un tipo particular de explicación, según la diferenciación de Balacheff, que se ha señalado anteriormente.

Desde esta perspectiva, son pruebas pero no demostraciones, las aserciones geométricas probadas recurriendo a figuras que parecen en la matemática hindú, por ejemplo la demostración de la propiedad de Pitágoras por áreas equivalentes. También son pruebas pero no demostraciones las realizadas por los escribas egipcios, quienes verifican los resultados para probar la justeza de los cálculos efectuados. Por ejemplo el volumen del cono circular recto en el papiro de Ahmes.

Arsac también se ubica en el debate de las razones que influyeron en el origen de la demostración, señalando – al igual que Eggers Lan - que la historia de esta época es conocida por los comentadores, pero no se cuenta con textos de matemáticos.

Una de las razones es de índole social. Utilizando como fuente a Szabó, menciona la influencia sobre los matemáticos de las costumbres de la sociedad griega y su uso del debate público y la argumentación libremente contradictoria como regla de juego intelectual para la vida política. La transformación de la matemática en ciencia hipotético deductiva sería la aplicación de las reglas del debate argumentativo a la Matemática.

Refiere que Szabó atribuye a Parménides y Zenón de Elea el origen de la transformación radical de la Matemática que simultáneamente precisa los objetos de esta ciencia y los define axiomáticamente como idealidades, objetos de pensamiento, y las reglas de manipulación, en particular la demostración que permite distinguir los enunciados verdaderos.

Otra de las razones es que (por el "principio de economía" de Bourdieu, que funciona en una comunidad productora de conocimiento: no se movilizan más razones lógicas que las necesarias para la práctica) la aparición de un conocimiento se da cuando es indispensable para la resolución de un problema. Y plantea que, en este caso, es el problema de la irracionalidad.

Con respecto a la relación entre irracionalidad y demostración, Arsac hace un minucioso análisis. Dice que el problema de la irracionalidad de V2, se confunde en ocasiones con el problema de la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con la diagonal. De hecho si bien se trata de un mismo problema, se puede mirar en dos marcos diferentes. En el aritmético, se trata de constatar que el número 2 no admite raíz cuadrada racional, y en el geométrico, se constata que la diagonal de un cuadrado no admite parte alícuota común con el lado.

En el marco aritmético, el problema es el de existencia, que no puede tener más que una respuesta negativa gracias a un razonamiento por el absurdo, y la idea de unicidad de la factorización con los números primos. Esa demostración es la siguiente: Si V2 fuera racional, se podría escribir

V2 = p/q (donde p y q son números enteros)

En tal caso se puede suponer que no tienen ambos el factor 2, pues en caso contrario se podría simplificar la fracción dividiendo numerador y denominador por 2. Elevando ambos miembros al cuadrado resulta:

2 = p2/q2, o sea 2 q2 = p2

De aquí resulta que p debe tener el factor 2, lo que no es posible porque se partió de suponer que ni p ni q tenían el factor 2.

El problema en el marco geométrico es que es imposible constatar en la figura la inconmensurabilidad, al contrario, la experiencia inmediata concluiría con la conmensurabilidad. Por lo tanto, la inconmensurabilidad sólo puede concernir a objetos matemáticos ideales y sólo pueden ser objeto de una demostración (y no de una mostración). Por lo tanto, el reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad en el marco geométrico implica la existencia de la demostración. Si el teorema de Pitágoras puede ser "mostrado", el de la inconmensurabilidad sólo puede ser "demostrado".

Esto lleva a dos preguntas, a saber: cómo tropezaron los griegos con el problema de la inconmensurabilidad, y si el razonamiento por el absurdo estaba presente en el siglo –V como modo de validación de una afirmación dentro o fuera de la matemática.

Para responder a la primera pregunta, dice Arsac, que la matemática griega predemostrativa aún no estaba individualizada como campo y no es posible separarla metodológicamente de la filosofía y de la física. Estaba dominada por el pensamiento pitagórico, del que retiene dos características: C1, todo es número, y C2, no hay diferencia entre el dominio geométrico y el físico, hay un sincretismo físico-matemático y una ausencia de distinción entre lo real y lo percibido.

En geometría esto significa que se puede considerar un segmento como una serie de puntos consecutivos y separados, asociar a cada segmento un número y adjudicar a todo par de segmentos una relación de enteros (por sus conocimientos en música). En tanto uno se ocupe de magnitudes concretas, siempre es posible encontrar por mediciones una relación racional, siempre es posible encontrar una parte alícuota común. Pero por otra parte, la geometría admitía la divisibilidad infinita de segmentos o dicotomía infinita pues se podía hallar con regla y compás el punto medio de un segmento, con lo que se llega a una contradicción que era posible por la ambigüedad de la noción de punto.

Frente a este pensamiento, aparece el problema de la inconmensurabilidad en diferentes contextos, por ejemplo en la relación entre el lado y la diagonal del pentágono. Para construir la parte alícuota común mayor posible entre dos segmentos, se va restando el menor del mayor cada vez y si se llegara a cero serían segmentos conmensurables. Si no lo son el proceso sigue hasta el infinito y la diferencia de longitud de dos segmentos sucesivos tiende a cero.

Este fenómeno cuestiona las ideas del pitagorismo. La solución del problema requiere de la definición de los objetos de la geometría como objetos de pensamiento donde las reglas de manipulación están fijadas por los axiomas, y las propiedades sean establecidas por demostraciones. En síntesis, en el marco geométrico aparecen las relaciones entre irracionalidad e inconmensurabilidad, por lo que el problema de los irracionales se resuelve en marco aritmético (no existe su raíz).

Con respecto a la presencia del absurdo en el siglo –V, nuevamente Arsac acude al trabajo de Szabó para sostener que luego de constatar el obstáculo en el seno de la matemática, se inicia una etapa de rechazo a la experiencia sensible y la intuición. El obstáculo interno se supera al precio de una refundación total del carácter mismo de las matemáticas. Y se supera gracias al aporte externo, según Szabó, de los eleáticos.

Para ellos el mundo sensible no puede ser el objeto de un conocimiento verdadero. La verdad no es accesible por la observación sino sólo por el pensamiento puro. Estos objetos son no-contradictorios se puede probar una afirmación sobre ellos, mostrando que su negación implica contradicción. Así el razonamiento indirecto es adaptado para estos objetos "hay otra cosa para hacer, no es suficiente suponer que un objeto existe y examinar las consecuencias de esta suposición, es necesario suponer que ese mismo objeto no existe si quieres plantear a fondo tu gimnasia..." (puesto en boca de Parménides en "Le Parmenides" de Platón). Como ejemplo de razonamiento indirecto cita un poema de Parménides, y es usado sistemáticamente por Zenón, quien es para Aristóteles el fundador de la dialéctica (un entrenamiento del razonamiento que es una deducción que toma como punto de partida razonamientos admitidos y obtiene consecuencias contradictorias a fin de refutarlas).

> *"Un espíritu contemporáneo sostendría que es la ruptura con la realidad de los objetos geométricos lo que le permite a la Geometría tomar el lugar de conocimiento verdadero. También que el conocimiento de los irracionales se construye contra la racionalidad en el sentido de Bachelard".* (ARSAC, 1987: 241)

Arsac plantea finalmente que lo que es imposible decidir es si la influencia eleática se da directamente o a través de Platón que tenía por discípulos a Teeto y Eudoxo que ponen a punto el problema de la irracionalidad.

Reteniendo las conclusiones de Arsac respecto de cómo la irracionalidad provoca una contradicción interna en el seno de la matemática griega, y cómo se resuelve se puede sintetizar lo siguiente. Por un lado, por las concepciones pitagóricas (en especial su panartimetismo), y como en esa época no estaba definida la matemática como campo de pensamiento no se puede hablar de origen interno o externo. Pero la irracionalidad da origen a un nudo de contradicciones que van a llevar a individualizar un campo, la matemática y en particular la geometría. (se podría hablar de problema interno). Por otro lado, el modo de pensamiento de la sociedad en esos tiempos, el eleatismo, influye ampliamente en la solución definitiva que va paralela con la configuración de la Matemática como ciencia hipotético deductiva.

Del trabajo de Arsac interesa retener que:

- Si bien la irracionalidad provoca una contradicción interna en el seno de la matemática griega, la elección de la solución fue ampliamente influida por la sociedad griega.
- La revolución ocasionada por la irracionalidad en la matemática griega está signada por la aparición simultánea de:
  - los objetos matemáticos como objetos ideales.
  - los enunciados generales
  - las demostraciones que prueban las afirmaciones apoyándose únicamente en axiomas, definiciones y reglas de la lógica, en particular la del tercero excluido.

Las coincidencias entre ambos trabajos, el de Eggers Lan y el de Arsac son entonces:

- el problema de los irracionales está asociado a la transformación de las matemáticas en una ciencia que usa la demostración para probar la verdad.
- esta transformación también implicó el uso de axiomas, es decir un cambio de status en los objetos de la matemática.

El sentido de la actividad de demostrar

Tanto Barbin (1988) como Le Fevre (1991) han realizado trabajos en los que marcan etapas en la evolución de la demostración.

Barbin estudia tres grandes etapas pues analiza esta evolución en función del sentido que tiene en cada una de ellas la actividad de demostrar.

En la primera etapa, que comienza en el mundo griego en el siglo –V y hasta el siglo XVII la demostración, dice Barbin, aparece como un modo de convencer en un debate contradictorio. Tiene las caracterísitcas se han señalado en el apartado anterior, es decir tal como aparece en los Elementos de Euclides. Frente a la crisis de los irracionales, nuevos objetos y nuevos métodos.

En la segunda etapa que se inicia el siglo XVII y se extiende hasta el siglo XIX, se produce una expansión considerable de los objetos conceptos y métodos. La demostración tiene por finalidad esclarecer más que convencer y los métodos de descubrimiento juegan un rol central. El término esclarecer se entiende como hacer comprender (a otros o a sí mismo) por qué un enunciado es verdadero, es decir en convencer por la comprensión más que convencer solamente por un razonamiento sin fallas. No se trata de forzar a la razón a reconocer la validez lógica de una argumentación, sino más bien de hacer ver y por lo tanto comprender ciertas ideas o ciertas relaciones de ideas o de figuras. Según Barbin es una ruptura importante en la historia de la demostración matemática.

En la tercera etapa, que se inicia en el siglo XIX, aparece la búsqueda de retorno al rigor como un modo de poner orden frente a importantes transformaciones en la disciplina. En la geometría, por ejemplo, que había tenido el dominio de la evidencia y la certeza, tanto que había permitido rodear la crisis de los inconmensurables, se produce una transformación mayor, la del concepto de espacio, a partir de la búsqueda de demostración del V postulado. En esta búsqueda de rigor, frente a la denominada crisis de fundamentos, aparece la escuela formalista (Hilbert), que abandona el sentido por la forma, y apunta a establecer la coherencia más que la verdad. Se da una nueva concepción de los objetos matemáticos. Para los formalistas, los objetos de la matemática definidos por la axiomática no tienen existencia objetiva sino que tienen que satisfacer el principio de no-contradicción interno a las matemáticas. La demostración retorna a su sentido de convencer por un razonamiento sin fallas y ajustado a las reglas de la lógica.

Para Barbin,

- considerar la actividad de demostrar en los períodos históricos de sistematización de conocimientos, y en los de creación y descubrimiento, permite reconocer en los primeros el sentido de convencer y en los segundos el de esclarecer o hacer comprensible aquello que se afirma.

Del trabajo de Le Fevre es significativo tomar para este estudio dos aportes, en relación con su señalamiento de los límites de la demostración en la empresa de sistematización de la matemática, y en relación con la actividad de demostrar en el sentido de comprender.

En relación con la primera cuestión, recuerda a Goedel, quien publica en 1930 uno de los textos más notables de lógica matemática, en el que afirma que no se puede probar la coherencia (no contradicción) con la lógica usual, porque todo sistema coherente contiene proposiciones indecidibles. Esto derriba la concepción unánime de la matemática. Se obtienen resultados bien diferentes según cuáles sean los axiomas. (Si, partiendo de un conjunto de axiomas se llega a un enunciado indecidible, se abren dos caminos, tomar o no tomar ese enunciado).

Señala Le Fevre que, aunque esto no ha sido el final de las matemáticas ni el final de las demostraciones, ha forzado a constatar los límites de la tarea comenzada hace veinte siglos por los griegos, en el que la demostración era el instrumento de sistematización del conocimiento matemático en un todo coherente. Continuará siendo posible hacer demostraciones, pero al interior de sistemas bien definidos y con instrumentos también bien definidos. Nuestro conocimiento está condenado a la incompletitud.

En relación con la actividad de demostrar en el sentido de comprender, propone considerar la marcha demostrativa como ocasión de relacionar, de descubrir lazos entre conceptos y resultados diversos, de establecer dependencias conceptuales. Es un ejemplo de este valor como instrumento para la producción de conocimientos, el que relata SINGH (1997) de la reciente demostración del célebre último teorema de Fermat (xn + yn = zn no tiene otra solución entera que n=2) realizada por Wiles después de más de 300 años. En realidad, Wiles demuestra una conjetura a partir de la cual el teorema es cierto. La historia de los avances en la demostración, utilizando conjeturas y equivalencias, reduciendo casos, y relacionando entre sí conceptos y teorías de distintos ámbitos de la matemática, es un ejemplo de esta capacidad de relacionar.

Destaca Le Fevre que en el siglo XVI, la necesidad de encontrar y probar a la vez, da lugar a retomar el método de análisis propuesto por Pappus y Theón, que implica un cambio de dirección del movimiento del pensamiento, de lo desconocido a lo conocido, de lo que se está por establecer a lo establecido. Viete es el más ilustre de aquellos que quieren rehabilitarlo. Para conjugar las virtudes heurísticas de un método propio de descubrimiento con la necesidad de respetar y asegurar la verdad de las proposiciones, habría luego que hacer el camino inverso.

Resulta conveniente retener de Le Fevre,

- la profundización del sentido de comprender asociado a encontrar nuevos lazos entre conceptos y resultados y a reconocer un doble movimiento del pensamiento en el proceso de creación de nuevas matemáticas.

Cambios y permanencias en la demostración

En relación con las demostraciones, la actividad de demostrar, y los matemáticos que desarrollan esta práctica, se ha consultado el estudio de BKOUCHE (1989).

Desarrolla la idea de que la demostración no es inmutable, no solo en lo que atañe al sentido de esta actividad, también hay grandes diferencias en cuanto a los objetos, a los métodos, al vocabulario y la forma de presentación que asumen. Al respecto, Bkouche compara dos demostraciones distantes 2000 años, y que se dicen análogas: un caso de igualdad de triángulos de Euclides, con la ayuda de desplazamientos rígidos y superposiciones y un caso de geometría afín demostrado por los métodos del álgebra lineal aplicada. Sin embargo, tal como señala Arsac (RDM 9.3.) faltan estudios con respecto a los cambios de forma de la demostración en la historia y a los problemas lingüísticos al considerar el aspecto social.

Asimismo hay que señalar que algunos estudios advierten acerca de necesidad de recuperar que matemáticos de una misma época pueden tener concepciones y usos diferentes de la demostración.

En relación con las permanencias, Bkouche quien se pregunta si es posible relevar, a través de las transformaciones históricas, caracteres sostenidos a lo largo del tiempo de algo que convenga llamar demostración para elegirlos como objetivos centrales de su enseñanza.

El autor señala tres: el carácter a priori, el carácter de necesidad y el carácter de universalidad. Arsac explica la significación de estos caracteres desde su punto de vista:

- el carácter a priori nos lleva al hecho de que la demostración da la posibilidad de economizar la experiencia . Aquí experiencia entendida en sentido amplio (puede ser sobre un objeto que ya tiene status matemático, por ejemplo experimentar el hecho de que el cuadrado de un número impar es impar) La manipulación de objetos es reemplazada por una manipulación de ideas, un razonamiento que apunta a una certeza superior.
- esta certeza expresa el carácter de necesidad de las conclusiones demostradas, a las cuales no se podrá oponer alguna constatación empírica contraria (por ejemplo, en geometría, algún dibujo particular). Pero esta necesidad no puede ser atendida más que a través de un cierto número de reglas suficientemente rígidas.
- en fin, el carácter universal de la demostración hace alusión al hecho de que los caracteres precedentes suponen que los objetos sobre los cuales se razona, que siempre están presentes en la demostración, aún cuando no se reduzcan a él, tienen un status de abstracción.

A modo de síntesis del capítulo, conviene comparar los aspectos que se han retenido como relevantes de los trabajos estudiados.

Cuando la comunidad griega se enfrenta al problema de los irracionales, y para dar solución a esta cuestión, aparece la necesidad de usar la deducción para probar la verdad, con lo que sus verdades son verdades necesarias, y los objetos matemáticos cambian de status, pasan a ser objetos ideales. El origen de la demostración está entonces asociado al surgimiento de la Matemática como disciplina autónoma.

Una mirada histórica que reconoce antecedentes a la demostración griega y una evolución en sus formas, lenguajes, y objetos a los que se refiere, permite considerar períodos más ligados a la sistematización de lo conocido, y recuperar que tal organización aporta nuevo conocimiento, y períodos en que prima la expansión de la ciencia, los nuevos problemas y nuevos conceptos e instrumentos para abordarlos. En concordancia con estos períodos, - y tal vez alternativamente predominantes cuando un matemático demuestra - convencer a otros cuando ya está convencido quien demuestra, o intentar comprender descubriendo nuevos conocimientos son dos sentidos posibles de la actividad de demostrar. Y en esa actividad, un doble movimiento del pensamiento, partir de un resultado conjeturado y buscar las relaciones que permiten obtenerlo como resultado, y luego deducir paso a paso de lo conocido a lo desconocido.

Por último, algunas características han permanecido a lo largo de la historia como propias de la demostración: el carácter a priori de sus enunciados que lleva al hecho de que la demostración dá la posibilidad de economizar la experiencia, el carácter de necesidad de las conclusiones demostradas por el funcionamiento de un cierto número de reglas suficientemente rígidas, y el carácter universal de los objetos sobre los cuales se razona que tienen un status de abstracción.

3. LA DEMOSTRACIÓN EN CONSTRUCCION DE LA RACIONALIDAD MATEMÁTICA.

En este capítulo, se reúnen los análisis derivados de nuevos estudios, pero también se retoman en una nueva perspectiva, las conclusiones del capítulo anterior. El propósito es comprender cuál es el lugar de la demostración en la matemática para así derivar pistas para pensar su enseñanza, y qué relación tiene con la formación de razonamiento en los jóvenes.

La demanda social que reciben sostenidamente los profesores de matemática es, centralmente, la de enseñar a razonar. Si un alumno no trata un problema razonando matemáticamente, se dice que tiene una falla de razonamiento, una falta de lógica, que ha hecho cualquier cosa, que es incapaz de comprender. Lo que ocurre en muchos casos es que el razonamiento utilizado respeta la lógica estándar de la vida cotidiana, pero no necesariamente la lógica matemática.

Todas las expresiones señaladas son de desilusión frente a la ausencia de una racionalidad científica de cuya enseñanza se responsabiliza a la Matemática y que pareciera que muchos profesores consideran un saber que el alumno tiene o no según cuáles sean sus capacidades, y por lo tanto no lo consideran un contenido de enseñanza.

Razonar matemáticamente es un saber que se debe enseñar como parte esencial de la enseñanza de la matemática, y para fundamentar esta afirmación, se presenta este capítulo.

Actividad matemática, validación y demostración

La actividad matemática frecuentemente ha aparecido en la versión escolar, como asociada únicamente al razonamiento deductivo, es decir que éste se ha mostrado como el modelo de pensamiento en esta actividad. Sin embargo, la práctica científica está muy lejos de este modelo. Cada comunidad científica, se ocupa de producir y comunicar conocimientos en un cierto dominio, y cada una tiene sus reglas de juego en relación con estas actividades. En este apartado, se darán algunas notas respecto de la producción y en particular de la validación de conocimientos en matemática, tomando trabajos de investigadores que analizan esta problemática con intencionalidad didáctica.

La producción en la ciencia, está ligada a procesos de resolución de problemas. Históricamente se conoce que los conceptos han surgido como respuestas a problemas de diversa índole, que en algunos casos fueron reformulados y resueltos con los conocimientos existentes, mientras que en otros casos dieron lugar a la construcción de nuevos recursos matemáticos. El investigador continúa esta tarea, resuelve problemas no resueltos. Esta actividad implica, entre otras cuestiones, el uso de formas de razonamiento diversas tanto deductivas como no deductivas. El proceso de resolución comienza cuando, quien la lleva adelante, toma a su cargo la tarea problemática, momento en el cual el estudio entra en una fase exploratoria. Al respecto, es ilustrativo el siguiente señalamiento:

> *"Se trata de una fase en la que no se dispone de una formulación suficientemente precisa del problema dado y que vuelve a aparecer cuando, aun disponiendo de un enunciado matemático preciso no se sabe cuáles serán las herramientas matemáticas más adecuadas para abordarlo. En esta fase juega un papel importante lo que el matemático Polya llamó el pensamiento matemático plausible o conjetural, es decir el arte de formular conjeturas. ...Nos referimos aquí a aquel momento del trabajo del matemático en que uno debe saber alejarse de lo que se acostumbra a considerar la certeza matemática para ponerse a razonar con lo probable o verosímil".* (CHEVALLARD, GASCÓN, BOSCH, 1997: 130/132)

Según Polya, hay patrones o leyes que rigen el pensamiento plausible, y éstas son de distinta naturaleza que las leyes lógicas utilizadas para demostrar resultados matemáticos bien formulados, lo que se suele llamar razonamiento deductivo. Ambas formas de pensamiento se complementan y son imprescindibles en la actividad matemática.

Las formas de razonamiento en la fase exploratoria no son necesariamente deductivas. Tal como se adelantó en la introducción, se considera razonamiento heurístico a la actividad intelectual, muchas veces no explícita, de manipular informaciones para, a partir de datos, producir nuevas informaciones. Esto ocurre de diversas formas: cuando el punto de partida es un hecho singular y al término del proceso se concluye en una ley general en cuyo caso se denomina proceso inductivo, cuando se intenta derivar una conclusión particular de un hecho general, en cuyo caso se trata de un proceso deductivo, también si se trata de un razonamiento por analogía que basándose en ciertas semejanzas comprobadas infiere otras que no pueden comprobarse. [6]

En cuanto a la validación de los conocimientos, en este estudio se toma la posición de considerarla una parte de la producción, difícilmente disociable de la resolución. Margolinas plantea al respecto:

> *"Comienza en general al fin de un trabajo de resolución de un problema matemático, es decir en el momento en el cual se necesita saber si el resultado obtenido conviene al problema planteado. El punto de vista de la validación comienza pues con el examen del fin de una resolución".* (MARGOLINAS, 1993: 22)

Se coincide con Margolinas respecto de que al fin del proceso de resolución se da una etapa de validación, pero sin desconocer que durante el proceso de resolución se pueden ir dando validaciones parciales. Validar el conocimiento producido, es garantizar que las proposiciones son verdaderas, y en Matemática, esto tienen una particularidad, como se expresa en el párrafo siguiente:

> *"El funcionamiento del conocimiento para el alumno debe aproximarse, gracias al aprendizaje, al funcionamiento del saber en la matemática"* .... *"Una de las funciones de la matemática es permitir la anticipación de los resultados de una acción. Anticipación que implica un doble movimiento: la predicción y la garantía de validez de la predicción"* ... *"Retomando el vocabulario que utiliza en particular Bachelard, digamos que las proposiciones matemáticas son apodícticas (necesariamente verdaderas, estén donde estén) y no asertóricas (verdaderas de hecho). El descubrimiento del carácter apodíctico de las proposiciones matemáticas forma parte del aprendizaje. Este lazo crucial entre matemática y verdad apodíctica coloca el punto de vista de la validación en el centro de los problemas de enseñanza de la matemática"* (MARGOLINAS, 1993: 23/24)

[6] Algunos estudios consideran también razonamientos abductivos (Panizza, 2000).

La problemática de la validación, que trata sobre el estudio de las diferentes formas de prueba en la actividad matemática, incluye la de la demostración, único instrumento válido para la comunidad científica.

Balacheff ha señalado que la validación de los conocimientos producidos, requiere considerar dos dimensiones, la lógica ligada al tipo de razonamiento involucrado, y la social ligada a las interacciones entre los sujetos que intervienen en el debate. Tomando esta cuestión, marca diferencias entre tres términos que son usados frecuentemente como sinónimos: explicación, prueba, y demostración.

> *"Explicación es un discurso que apunta a hacer inteligible el carácter de verdad adquirido por el locutor, de una proposición o resultado.*
> *Prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser objeto de un debate donde la exigencia para determinar un sistema de validación común a los interlocutores es la significación.*
> *Demostraciones son pruebas que adoptan una forma particular. Son una serie de enunciados organizados siguiendo reglas determinadas: un enunciado es conocido como verdadero o se deduce a partir de los que le preceden con la ayuda de una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definidas."* (BALACHEFF, 1987)

Tomar en cuenta también el aspecto social no implica relativismo respecto de la verdad de cada enunciado matemático, sino acuerdo entre los matemáticos de una determinada época, sobre la aceptación o no como válida de una demostración, aceptación ligada al conjunto de conocimientos disciplinares del momento, la fundamentación dada desde la lógica de las reglas utilizadas y las necesidades de avance o no de los resultados y sus aplicaciones.

Al idear y experimentar situaciones de enseñanza para investigar los tipos de prueba utilizadas por los alumnos, Balacheff, elabora una jerarquía de pruebas: unas de marcha empírica (el empirismo naif, la experiencia crucial, el ejemplo genérico) y otra de marcha intelectual (la experiencia mental). Las pruebas pragmáticas tienen sus raíces en el sentido común, y no son consideradas pruebas en la comunidad científica. Se apoyan sobre saberes prácticos, jugados esencialmente en la acción. Las pruebas intelectuales demandan que esos conocimientos puedan ser tomados como objeto de reflexión o de debate.

Su conclusión es que la evolución de las pruebas pragmáticas a las intelectuales en el alumno y en particular la elaboración de demostraciones requiere de tres factores que interactúan fuertemente

> *"El polo de los conocimientos de los alumnos*
> *El polo del lenguaje*
> *El polo de la racionalidad o de los tipos de racionalidad que subyacen a las pruebas producidas."*(BALACHEFF, 1995: 159/160)

Otros investigadores, también estudian este cambio en el alumno. Duval por ejemplo, se pregunta si el cambio de punto de vista del alumno en relación con el razonamiento, cuando pasa de un razonamiento natural a un razonamiento matemático implica una continuidad o una ruptura. Lo analiza en términos de comparación entre el funcionamiento cognitivo de la argumentación y el de la demostración.

Aunque este tema del cambio en el alumno es de gran interés para pensar la enseñanza de la demostración, no se avanzará en más cuestiones al respecto, pues en este estudio no se pretende analizar el funcionamiento de la clase. Interesa sí profundizar en las relaciones entre demostración y racionalidad.

Razonamiento deductivo y racionalidad matemática

Para aclarar el sentido que se le da en este estudio al término racionalidad empleado por Balacheff, es posible considerarla como una noción cercana a la de "marco epistémico" de García, quien refiriéndose a ella dice:

> "*Esta expresión, ... representa un sistema de pensamiento, rara vez explicitado, que permea las concepciones de la época en una cultura dada y condiciona el tipo de teorizaciones que van surgiendo en distintos campos del conocimiento. Cambios muy significativos de marco epistémico marcan grandes épocas históricas. No se originan en las teorías que contemplan aspectos particulares de las disciplinas, aunque sí pueden aparecer como una resultante de un cambio profundo en la concepción de las disciplinas*" (GARCÍA, 1993: 157).

Se trata del conjunto de instrumentos que sirven para conocer, y lo que se concibe como posible de abordar, lo que se concibe como pregunta y lo que no. Este marco condiciona pero no determina el marco conceptual.

La Historia de la Ciencia muestra que la racionalidad que funciona en una comunidad científica, y en particular en la matemática, se construye por etapas, por ensayos, errores y elecciones que dan lugar a confrontaciones en el interior y entre las comunidades (KHUN, 1995).

Un cambio de racionalidad no es sólo conceptual, sino también de las formas de abordaje. Un cambio en el marco epistémico condiciona toda la disciplina pero un cambio en el marco conceptual no. Por ejemplo, aceptar las geometrías no euclideanas fue un cambio epistémico, pues a partir de él la geometría ya no modeliza el espacio físico.

> "*Los métodos se transforman a medida que los nuevos problemas cuestionan su validez.*" (BKOUCHE, 1989)

En su trabajo sobre el debate científico, Legrand señala cuáles son los elementos que determinan la racionalidad científica, o en sus términos "¿cuáles son los objetos de saber indispensables para conocer qué juego se juega en las instituciones científicas?".

Siguiendo el criterio de Legrand, se puede considerar que la racionalidad en cada una de las distintas prácticas científicas se da en dos niveles: la validación externa, que está en relación con la eficacia de uso de los instrumentos teóricos en su funcionamiento en situaciones exteriores a la teoría, y la validación interna, es decir los criterios de validez que rigen de manera esencial el funcionamiento teórico.

En el funcionamiento de una ciencia se crean modelos despegándose de la realidad. La Matemática, es el paradigma ideal de este funcionamiento porque todos sus objetos deben ser previamente definidos, y esto le confiere una cierta simplicidad de utilización. De ellos se puede decir si son verdaderos o falsos, sí o no, paralelo o no paralelo, se pueden plantear dicotomías. De hecho, la regla del tercero excluido funciona eficazmente en esta ciencia, mientras que es mucho más delicado hacerla funcionar en las ciencias aplicadas.

> *"Así, contrariamente al criterio de validez comunmente adoptado en el tratamiento racional de otros dominios de la realidad, en la Matemática vale la regla del contraejemplo. Es por esta regla que la matemática adquiere el carácter de instrumento universal de las otras ciencias".* (LEGRAND, 1988)

En la ciencia, la búsqueda de generalidad de las afirmaciones conduce a un proceso de simplificación consciente de lo real estudiado, de focalización sobre un aspecto específico o de un cambio radical de punto de vista. Este camino conduce a la retención de información. Por el contrario, en la vida cotidiana, aclarar la verdad reclama decir todo lo que hay que decir sin omisiones.

Como se ha visto en el apartado anterior, para que un alumno adquiera una racionalidad matemática es necesario conducirlo a operar un cambio en su punto de vista, pues en la racionalidad cotidiana, no hay necesidad de formular definiciones, la regla del contraejemplo en general no funciona, porque el principio de dicotomía y el tercero excluido es casi siempre inutilizable, y en el intercambio interpersonal, se pone acento en la verosimilitud más que en la verdad, con lo que prima el principio de dar la máxima información para convencer al interlocutor.

> *"Para que un alumno ingrese en una racionalidad que reconozca el carácter apodíctico de las verdades matemáticas, es necesario que el niño perciba que comprende. Vive –en ese caso- una "mutación filosófica""*(Bachelard en MARGOLINAS,1993: 24)

A modo de síntesis, se puede decir que la problemática de la construcción de una racionalidad matemática por parte del estudiante, está ligada a:

- la posibilidad de utilizar diferentes formas de razonamiento para resolver problemas,
- la consideración de los enunciados como verdades apodícticas,
- el uso de la demostración para validar, basado en los grandes principios lógicos: identidad, contradicción y tercero excluido.
- la construcción de un universo matemático que tenga sentido para el alumno, que de lugar al uso del razonamiento deductivo, pues éste no puede ser enseñado por sí mismo.

> *"Elaborar una demostración no es solamente deducir, es también y al mismo tiempo construir los objetos matemáticos, construir la racionalidad matemática misma."* (BARBIN, 1989: 5)

> *"El objeto de la demostración es aportar conocimiento sobre los objetos matemáticos" "La actividad de demostrar está ligada a la construcción de los objetos matemáticos y más ampliamente del objeto de la matemática*" (BARBIN, 1989: 6)

Ahora bien, entre racionalidad y demostración, es posible considerar cuál de ellas es condición previa para la otra. Bkouche analiza esta cuestión acudiendo a la que denomina "epistemología gonsetiana":

> *"Es menos un discurso sobre la ciencia que una tentativa de explicitación de la marcha científica en los lugares en que ella es balbuceante y donde, al mismo tiempo que construye saberes nuevos y elabora métodos nuevos, debe determinar las condiciones de legitimación, es decir las condiciones de certeza del saber así construido.*

Las condiciones de certeza no residen en una garantía a priori (la doctrina prealable, necesaria al fundamento de todo conocimiento), sino en la globalidad del saber, es sobre él saber mismo que ésas condiciones se construyen, lo que podemos resumir diciendo que "la doctrina previa no deviene previa hasta después".

"La actividad de demostrar no es la aplicación de una racionalidad determinada a priori, sino que es el lugar de construcción de esa racionalidad".(BKOUCHE: 1989)

Se subrayan entonces, las conclusiones de este capítulo:

Para enseñar realmente lo que es la matemática es indispensable incluir como contenido la enseñanza de la demostración, ya que sin ella no aparecería uno de los rasgos esenciales de la racionalidad matemática. La demostración como forma de validación más exigente que otras pruebas en el sentido de que implica no sólo una forma particular de abordar los objetos, sino el status de los objetos mismos y el lenguaje utilizado para su tratamiento, debiera aparecer como forma de introducir a los alumnos en el razonamiento deductivo.

La actividad de demostrar debiera aparecer en la matemática escolar como una forma de validación entre otras, que un alumno debiera realizar en el aula como parte de sus prácticas matemáticas. Para ello es necesario instalar en el aula una forma de actividad matemática, en la que los conocimientos vivan como respuestas a problemas, y en la que los alumnos puedan resolver solos y también interactuando con otros, se controle la respuesta obtenida, se reflexione sobre lo producido analizando las formulaciones, debatiendo y argumentando sobre su validez.

El punto de vista que orienta la mirada sobre la demostración como objeto de enseñanza, y su relación con la formación del pensamiento de los jóvenes que se desarrolla en los capítulos 4 y 5, se deriva de los análisis desarrollados en este capítulo con el que concluye la primera parte del estudio.

PARTE II: SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN

4. LA DEMOSTRACIÓN EN LAS ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA

En este capítulo se presentan los estudios sobre la enseñanza de la demostración en el primer[7] ciclo de la escuela media, desde 1950 hasta el año 2000. La elección del ciclo está fundada en dos razones. La primera de estas razones, es que la obligatoriedad establecida para el mismo desde el año 1994, torna imprescindible adecuar la enseñanza de la matemática de modo que todos los alumnos puedan acceder a los instrumentos que ésta brinda para su formación intelectual. La segunda razón es que en este ciclo la noción de demostración aparece por primera vez en la enseñanza, si se considera el momento en que un estudiante la conoce en su recorrido escolar.

Se ha señalado ya en la introducción que este estudio toma la primera etapa de la transposición, aquella en la que el objeto de la ciencia – tal como circula en ese momento histórico en la comunidad de referencia - es preparado para su entrada al sistema de enseñanza, a las instituciones didácticas, y transformado en un objeto para ser enseñado.

Esta preparación didáctica implica por una parte, un proceso de selección de las obras[8] matemáticas que forman parte del proyecto social de enseñanza. ¿Cómo se eligen y cómo podrían elegirse en cada sociedad y en cada período histórico las cuestiones que deben ser estudiadas por los jóvenes ciudadanos? Las decisiones que se toman son siempre decisiones de peso político, fruto o no de negociaciones entre sectores sociales, pero esta selección prefigura de cierta manera el curriculum, y ciertamente es una problemática didáctica, pues no es posible separar las formulaciones iniciales del desarrollo detallado del curriculum. En este estudio se parte de los objetos ya designados como aquellos que se deben enseñar en la escuela media sin abordar la cuestión de su selección, sino que se analiza cuáles son los rasgos generales que ha asumido la demostración en la presentación a los profesores en tanto interlocutores de una primera etapa de la transposición, qué lugar tiene la demostración en el conjunto de los conocimientos que la escuela es responsable de enseñar.

---

[7] Se denomina primer ciclo de la escuela media, al que hoy es el tercer ciclo de la Educación general Básica, y antes del año 1996, el ciclo básico, o 1ero., 2do. y 3er. Año de bachillerato, comercial y técnica.

[8] Obra como se usa en Chevallard 1997, como fruto de la acción del hombre, como resultado de decisiones o ausencia de decisiones, y si son obras no acabadas son "obras abiertas"

Interesa considerar en este trabajo aquellos elementos que intervienen en la conformación del objeto de enseñanza que percibe el profesor de matemática sin profundizar en la continuidad de este proceso en el seno de las instituciones de enseñanza. Se toman los elementos que inciden sobre la concepción que él fue adquiriendo a lo largo de sus prácticas desde su formación inicial como profesor y en el tramo ya recorrido de su trayectoria profesional, y es más, recuperando su propia historia como estudiante de la escuela media.

Esta investigación se ha realizado a partir de tres tipos de materiales: por un lado aquellos que permiten definir las orientaciones para la enseñanza: los libros de matemáticos y los documentos regulatorios, y por otro, los libros de texto. Cada material se ha observado para analizar diferentes cuestiones, a saber:

✓ Los **libros de matemáticos** preocupados por la educación sobre la enseñanza de su disciplina, cuya opinión fue altamente valorada y seguida – al menos en los propósitos de su tarea - por los profesores de su época, y publicaciones mensuales que llegan a algunos grupos de escuelas privadas, han dado lugar a indagaciones sobre la concepción de matemática de la época y de su enseñanza, o al menos la de muchos de sus contemporáneos pues al explicitar la manera en que ellos piensan su disciplina han influido en el resto. Además, los autores elegidos fueron activos participantes de las en las dos últimas reformas. También se relevaron cuando fue posible sus concepciones de aprendizaje y de enseñanza, así como sus comentarios acerca del razonamiento y las demostraciones.

✓ Los **documentos oficiales regulatorios** de la enseñanza, tales como los programas, resoluciones y circulares del Ministerio de Educación, y documentos curriculares de distinto tipo, permiten analizar cómo aparecen la demostración y la formación del razonamiento. Si aparecen en los objetivos, o en los contenidos, en tal caso en relación con qué otros se presentan, si se deben evaluar y con qué estrategias enseñar, etc. Si han tenido una preparación didáctica que contemple o no sus diferencias con el objeto de saber en la matemática. En estos documentos, se tomaron las referencias a términos como: prueba, teorema, argumentación, conjetura, demostración, deducción, inducción, inferencia, hipótesis, justificación, resolución de problemas, propiedades características, resolución de problemas.

- ✓ Los **libros de texto**, producidos en la Argentina en el circuito privado, continúan definiendo los contenidos de la enseñanza curriculum en términos de alcance y organización, así como las prácticas docentes, las actividades de los alumnos.

Los análisis de los libros de texto para estudiantes de la escuela media de diferentes épocas, modalidades, autores y años –siempre dentro del primer ciclo, y se presentan los análisis y conclusiones en el capítulo cinco.

Los análisis e interpretaciones realizados de los dos primeros tipos de materiales parten de considerar la cuestión relativa al curriculum en Matemática. Distintos autores han definido el curriculum de diferentes formas que van desde "un programa estructurado de contenidos concretos de una disciplina", hasta el "conjunto de toda la experiencia que tiene el niño bajo la tutela de la escuela". En este estudio se considerará, como lo plantea Chevallard, que el curriculum de matemática es el conjunto de especificaciones en relación con el aprendizaje y la enseñanza de los objetos matemáticos designados para ser enseñados. Según la relación entre los aspectos matemático y los psico – socio – pedagógicos que intervienen en el curriculum, se pueden considerar al menos dos perspectivas.

En una concepción donde el aspecto matemático se considera no problemático, se mantiene la ilusión de transparencia entre el objeto de saber en la ciencia y el objeto de enseñanza, y se intenta imitar con mayor o menor fidelidad la obra matemática. En este caso, la elaboración de curriculum se centra principalmente en las cuestiones referidas a los aspectos psico – socio – pedagógicos.

En la concepción de la Didáctica de la Matemática, la elaboración del curriculum implica una adaptación escolar de la obra matemática, una reconstrucción de la misma para su enseñanza. El hecho de que el curriculum es un texto escrito, una "textualización del saber realizada para su entrada al sistema de enseñanza", requiere de varios procesos, el de selección de fragmentos del saber, el orden en que será expuesto y el lenguaje con que será expresado, la organización de una secuencia según un criterio que contemple tanto las características particulares de los objetos matemáticos como las formas de apropiación de los alumnos, lo que se traducirá en términos de alcance de cada saber en cada etapa de la secuencia elegida, la distribución temporal en los ciclos, y años de la escolaridad. En fin, la adaptación a las restricciones del sistema de enseñanza, donde lo que motoriza la aparición de nuevos conocimientos ya no es la necesidad de resolver problemas no resueltos como ocurre en la vida de los conocimientos en la ciencia, sino la dialéctica antiguo nuevo y la obsolescencia interna (CHEVALLARD, 1989).

En esta perspectiva, es necesario considerar que la textualización plantea límites a la posibilidad de explicitar las características de un saber como objeto para ser enseñado pues "ningún texto del saber contiene todo el saber a enseñar", ya que esta "puesta en texto de un saber vivo, una obra abierta, implica intentar atrapar en la linealidad del discurso su diversidad y su devenir. Es por tanto considerando estos límites que se analizan las orientaciones curriculares.

Por otra parte, también la naturalidad del curriculum es una ilusión, lo que enseña la escuela es una obra abierta siempre inacabada que evoluciona con la sociedad. Como parte del curriculum de matemática, se analizan en este capítulo y en el próximo, la demostración y el razonamiento o la formación del pensamiento.

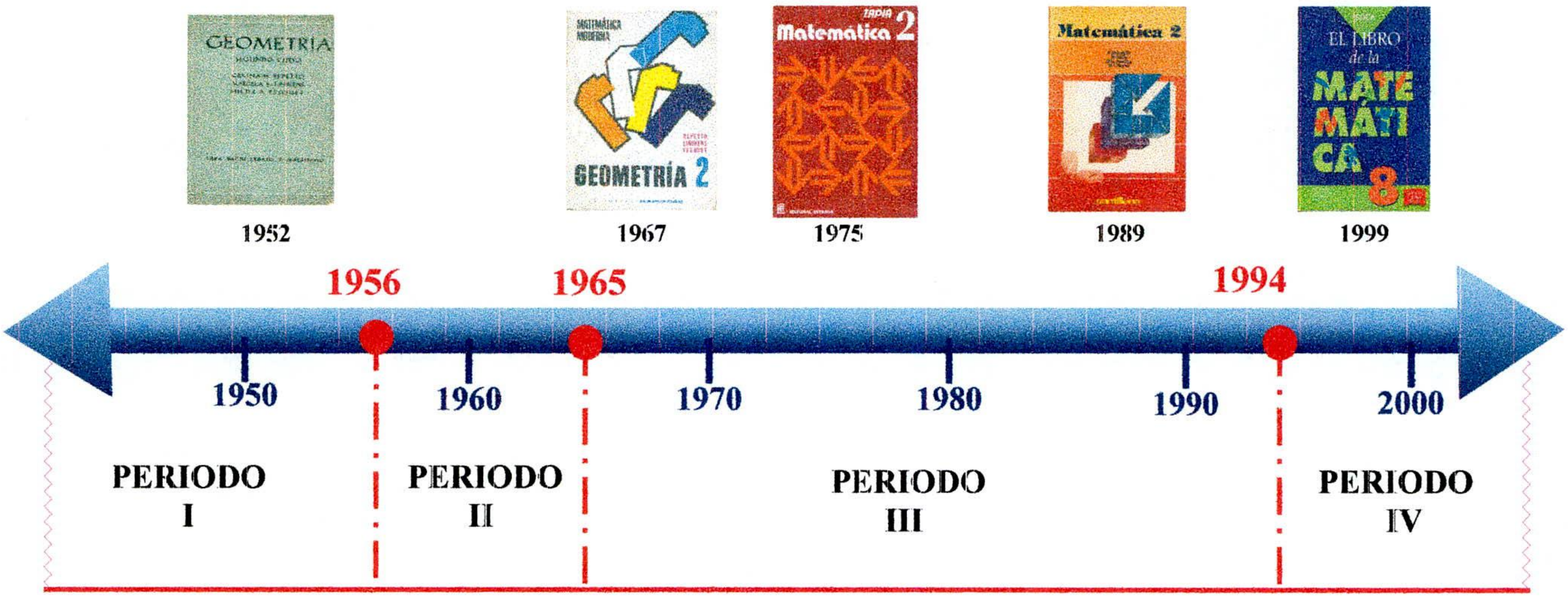
En este capítulo en particular se desarrollan las referencias a la enseñanza de la demostración y su relación con la del razonamiento, en los libros de matemáticos y en las regulaciones, analizando la transiciones y los cambios entre cada período.

Períodos y transiciones en la enseñanza de la demostración

En la indagación de las fechas de reformas se ha relevado que, en 1926 se realiza la primera reforma para la enseñanza de la Matemática en el nivel medio, siendo las posteriores las de los años 1937, 1940, 1956, 1965/66 y 1994/5 en que se produce la última modificación. (TORANZOS, 1959).

En el período en estudio se toman las modificaciones producidas en 1956 al plan de 1940, la de 1965, y la de 1994, en los planes, programas, y documentos curriculares respectivos, se determinan entonces tres momentos de cambio a los que se hace referencia por separado y cuatro períodos, tal como se muestra en el esquema N° 1. :

PERÍODOS Y TRANSICIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA DEMOSTRACIÓN. ESQUEMA Nº 1



- ✓ el período I se inicia en 1950 y concluye en 1956,
- ✓ el período II de 1956 a 1965,
- ✓ el período III comienza en 1965 y finaliza en 1995,
- ✓ y el período IV entre 1995 y 2000.

Se entiende entonces que se formulen tres transiciones entre los cuatro períodos, y que para relevar la orientación de tales transiciones se tomen los textos sobre la enseñanza de matemáticos reconocidos en cada época. Tales libros son los de Toranzos para la reforma de 1956, Santaló para la de 1965 y los documentos de las Fuentes para la transformación curricular de Cuenya, Fava – Gysin y Saiz para la del 1994.

En cada apartado, se incluye un estudio más descriptivo que analítico de las orientaciones para la enseñanza desde 1950 hasta 2000, que distingue características relevantes de cada período y luego en las conclusiones del capítulo se comparan sus semejanzas y diferencias.

Por la evolución en la estructura y componentes de las orientaciones oficiales, y los cambios de la demostración dentro del curriculum, en algunos períodos no se encuentran referencias explícitas a ella. Por esa razón en el análisis de los contenidos de enseñanza, se releva la forma en que aparece la demostración en relación con un objeto del campo geométrico, la noción de paralelogramo y el conjunto de objetos matemáticos que aparecen ligados a él.

Esto tal vez se debe además, a que esta noción está fuertemente ligada al objetivo de formación de los alumnos en el método o el pensamiento matemático por lo que se encuentra en general más referencias a ella en las resoluciones y en los libros de los matemáticos influyentes.

Se desarrollan para cada período, las características relevadas sobre las siguientes cuestiones:

- ✓ matemática a enseñar y lugar de la demostración
- ✓ aprendizaje y enseñanza, y la formación del razonamiento deductivo
- ✓ contenidos, objetivos, actividades, evaluación

La transición del período I al período II

La transición a la que se hace referencia, aparece descripta en las diferencias que marca Toranzos entre la enseñanza que funciona en las escuelas hasta 1959 - en el período 1 - y su propuesta – que caracteriza el período 2 -, tomándose como hito que separa ambos períodos la reforma de 1956.

En su libro sobre la enseñanza de la Matemática, Toranzos señala que la enseñanza secundaria en la Argentina, nació con una impronta "esencialmente formativa y cultural". Al analizar los planes de estudio de las reformas anteriores a la del 56, plantea que la enseñanza de la Matemática en Argentina oscila desde sus inicios entre dos orientaciones que denomina racionalista e intuicionista, y que deben ser superadas por una nueva orientación que concilie las dos posturas.

A partir de 1940 y hasta la reforma de 1956, la enseñanza fue de orientación racionalista, y Toranzos la describe del siguiente modo:

> *"La orientación racional preconiza la enseñanza de la Matemática tal cual es, siguiendo la sistematización de Euclides con las modificaciones que aconsejan los tratadistas modernos. Se presenta la matemática formal y abstracta, con su estructura rigurosamente lógica, su sistema de fundamentación axiomática, su red de postulados, teoremas, corolarios, etc., todos ellos ligados por rigurosas demostraciones*". (TORANZOS, 1959 :149)

Esta enseñanza, señala el autor, acarrea problemas para su aprendizaje:

> *"el exceso de demostraciones formalistas artificiosas y poco sugestivas, y el muy poco papel dado a la ejercitación práctica, hace del aprendizaje de la Matemática en una pesada tarea de memorización mecánica de teorías formales y abstractas cuyo significado permanece inaccesible al adolescente"* (TORANZOS: 52)

La orientación intuicionista, que según Toranzos fue promovida por la reforma de 1937, intenta dar más importancia a la comprensión de conceptos y relaciones que a la estructura y método de la disciplina, pero se "falsea la estructura lógica deductiva que es precisamente su esencia y su valor formativo" " (TORANZOS: 55). El autor la caracteriza planteando:

> "*La intuitiva no tiene en cuenta el rigor lógico y trata de llegar a la formación de conceptos apelando al sentido común, a la imaginación, a la intuición, y aún a la experiencia.*"... "*se descartan las preocupaciones por la pureza metodológica de la estructura, se dejan de lado las pretensiones de ordenamiento lógico y riguroso, así como las exigencias de dar demostraciones lógicamente perfectas*" (TORANZOS, 1959: 149)

Su propuesta intenta conciliar lo que considera positivo de ambas orientaciones, y la formula del siguiente modo:

> "*partir de lo intuitivo para dar entrada progresiva al rigor, dar importancia a los procedimientos heurísticos para desarrollar la capacidad para la actividad original, dar importancia a las aplicaciones y objetivaciones, dar cabida a la intuición como auxiliar para lograr una mejor comprensión de los conceptos y razonamientos matemáticos, pero no en sustitución de los razonamientos lógicos*". (TORANZOS: 39)

Se ocupa de describir la enseñanza, siempre como una exposición por parte del profesor, explicando los que denomina métodos inductivo y deductivo, de la siguiente forma:

> *"Se aplica la inducción cuando se ejemplifica antes o en lugar del desarrollo deductivo, pero debe hacerse notar que su intención es la comprensión y no la demostración de cuestiones matemáticas. También son de este tipo las demostraciones intuitivas o ejemplificadas, y por eso a continuación o en el segundo ciclo es necesario efectuarla demostración rigurosa. En aritmética, por ejemplo, las demostraciones por inducción completa son dificultosas. El método inductivo es fundamental en aplicación de caminos heurísticos y de resolución de problemas, principalmente cuando se quiere encontrar la solución, pero el proceso no queda concluido, es necesario demostrar que la solución es la correcta por el método deductivo"* (TORANZOS)

Considera que los programas, deberían dar las indicaciones necesarias para fijar la orientación, especificando qué temas se pueden tratar por vía demostrativa, cuáles de una manera no formal, y cuáles pueden ser motivo de aplicación y para estudios heurísticos, como por ejemplo las construcciones geométricas.

Por otra parte, con respecto al aspecto formativo de la enseñanza de la matemática, la considera como enseñanza disciplinadora de la inteligencia. Explica que el razonamiento puede ser tanto inductivo como matemático, incluyendo en éste, además de la deducción silogística, la inducción completa y el razonamiento probabilístico, y aclarando que en las ciencias físico naturales y humanas juegan ambos métodos, pero que en Matemática lo inductivo experimental no interviene. Plantea que el razonamiento matemático es la modalidad fundamental del pensamiento para establecer relaciones de carácter deductivo. Dice:

> *"el esquema lógico matemático h entonces t, es fundamentalmente análogo al que se plantea cuando se conocen ciertos hechos y de ellos se quieren obtener conclusiones por el camino deductivo. De aquí que la Matemática prepare para analizar y deducir, fijando con precisión la hipótesis o hechos conocidos y la tesis o conclusiones pasando por un camino racional seguro mediante el uso de la lógica.* (TORANZOS: 63).

Las orientaciones oficiales para la enseñanza en este nivel durante este período se producían en la Dirección Nacional de Enseñanza Media del Ministerio de Educación de la Nación, y eran difundidos a las escuelas mediante circulares y resoluciones.

Consisten en los que fueron denominados como planes y programas de estudio, que se limitaban a un esquema muy sintético con el contenido de la enseñanza de cada materia y su distribución por cursos y, en algunos casos, con indicaciones para el profesor.

Como se ha planteado, el análisis de los programas se focaliza en la noción de paralelogramo, que se ubica en segundo año, y en las novedades que introduce el plan de 1956 con respecto al de 1940.

En el programa de 1940, los contenidos están agrupados en dos bloques, Aritmética y Geometría. La noción de paralelogramo aparece en una unidad que se denomina "Paralelogramos y trapecios", y consiste en varias listas seguidas, cada una de las cuales comprende una figura, y las propiedades y construcciones que se relacionan con ella. Separando cada lista, se menciona "ejercicios de aplicación". Las figuras están nombradas, por ejemplo "paralelogramo", las propiedades están enunciadas en forma completa, por ejemplo "En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales", y para las construcciones se indica en cada caso a partir de que datos debe hacerse, por ejemplo "Construir un paralelogramo dados dos lados consecutivos y el ángulo comprendido" La misma secuencia se plantea luego para cada uno de los paralelogramos especiales, rectángulo, rombo y cuadrado.

En el programa de 1956, se mantiene la agrupación de los contenidos en dos bloques de Aritmética y geometría, y aparece en el primero de ellos, como unidad Nro. 1: "Revisión sobre las nociones de conjuntos vistas en primer año (que son: conjunto y elemento, inclusión y pertenencia, unión e intersección). Par ordenado. Relaciones entre conjuntos: equivalencia y orden, ejemplos". Es interesante señalar que en esta primera introducción en los programas de las nociones conjuntistas, no se modifica en nada la organización del resto de los contenidos

La enunciación de los contenidos relativos a la noción de paralelogramo en este programa, se hace en tres capítulos, uno que se titula "Paralelogramos", en el que aparecen solamente "definición y propiedades de los paralelogramos en general" sin nombrarlas ni enunciarlas, otro capítulo de "Paralelogramos especiales", en el que aparecen mencionadas tales figuras geométricas "rectángulo, rombo y cuadrado, definiciones y propiedades generales y especiales de estas figuras", y otro para las "construcción de paralelogramos, rectángulos, rombos y cuadrados y justificación de los procedimientos correspondientes", sin especificar las condiciones dadas como dato.

La transición del período II al período III

Esta transición entre el período II ya caracterizado y el período III, se evidencia en el texto de Santaló cuando se refiere a las diferencias entre las que denomina matemática clásica y matemática moderna, separados por la reforma de 1965.

En el análisis del libro de Santaló[9] (1966) se aprecian referencias significativas que marcan la transición. Con respecto a la matemática a enseñar, al explicar los cambios que se proponen en la reforma señala que éstos se dan en varios aspectos. Por un lado, hay un cambio de lenguaje, por otro hay un cambio en el orden y en la jerarquización de los contenidos:

> *"(La matemática moderna) adopta una nomenclatura y un simbolismo más adecuado a las nuevas modalidades"... "cambió su ordenamiento pasando a primer plano capítulos hasta entonces secundarios y relegando al olvido capítulos hasta entonces tenidos como fundamentales"... "trata de incluir los problemas de la clásica como casos particulares de situaciones más amplias".* (SANTALÓ, 1966: 11)

También hay un cambio en el tipo de problemas que se plantea y en la forma de tratarlos:

[9] Tal como aparece en la publicación de Consudec de agosto del 65, Santaló fue uno de los integrantes de la comisión Nacional para la Enseñanza de la matemática

> *"La matemática clásica enfoca un determinado problema y lo resuelve con métodos adecuados al mismo. La matemática moderna crea estructuras muy generales, se coloca en el punto de vista más elevado posible y deja la solución de los problemas particulares como ejercicio de sus poderosas herramientas. La misma generalidad, al apartarla de casos concretos donde fijar ideas, le obliga a un mayor cuidado en las demostraciones, lo que le da una apariencia de mayor rigor que respecto de la matemática clásica".* (SANTALO, 1966: 11)

Con respecto al cambio en los contenidos que implicó esta reforma, dice el autor:

> *"En 1962, en Estocolmo se estudiaron los temas a incluir en la escuela secundaria: Elementos de la teoría de conjuntos, Introducción de la lógica, Probabilidades y estadística, Algebra moderna".* (SANTALO, 1966: 25)

> *"Toda la matemática se basa en razonamiento lógico, por lo que conviene incluir elementos de lógica matemática aunque en proporción moderada pues no se razona bien pensando en reglas aprendidas sino a través de una práctica continuada como ofrece el estudio de la matemática".* (SANTALO, 1966: 30)

> *"Para la enseñanza del álgebra dice "se la hace depositaria de la parte axiomática que se le quita a la geometría. Se empieza por la idea de conjunto, y los símbolos de pertenencia, inclusión, unión e intersección".* (SANTALO, 1966: 28)

No hay referencia muy claras respecto del aprendizaje, salvo las referencias el "desarrollo de la intuición" y "la deducción lógica".

Con respecto a la enseñanza del razonamiento y en particular del razonamiento deductivo, al que considera herramienta fundamental de la Matemática, el autor plantea que la matemática del secundario debe enseñar a razonar bien, y que por ello debe ser, sobre todo formativa. Señala que no hay matemática sin razonamiento y que aprender matemática es la mejor manera de aprender a razonar.

Su propuesta para la enseñanza de la geometría incluye dos elementos: el desarrollo de la intuición, y el uso de la demostración "como método para comprender mejor cosas no evidentes". En este sentido, luego de señalar que las demostraciones de los Elementos de Euclides, que fueron para la enseñanza el modelo de todo razonamiento matemático basado en la deducción lógica, no eran lógicamente perfectas, y que la geometría de Hilbert era muy compleja para el primer nivel de secundaria, propone abandonar la idea de edificar una geometría rigurosa en el primer ciclo.

> *"Se evitará la demostración de proposiciones cuyo enunciado parezca a los alumnos de una evidencia tal que no sientan la necesidad de una justificación. El tratamiento lógico y formal debe reservarse para más tarde".* (SANTALO, 1966: 25)

El autor señala también que la ejercitación de la demostración de teoremas debe ser mayor en esta propuesta que en la geometría racional axiomática, insistiendo con la idea de que se reserven para aquello que el alumno no vea como cosa evidente.

Y brinda ejemplos de algunas demostraciones a tratar en el primer ciclo, y entre estos ejemplos incluye tanto demostraciones por el absurdo como por inducción completa Para 1er año, propone demostrar la concurrencia en un punto de las tres bisectrices, algunas propiedades de los paralelogramos y el teorema de Thales, así como dar ejemplos de condición necesaria, de condición suficiente, y de condición necesaria y suficiente, y con ayuda del 5to postulado de Euclides, demostrar por el absurdo el recíproco de que ángulos correspondientes son iguales. Para 2do año, propone sistematizar elementos básicos de teoría de conjuntos e incluir el principio de inducción para demostrar la suma de los n primeros naturales. (SANTALO, 1966: 42)

En las orientaciones a los docentes derivadas de la reforma de 1965, el programa de segundo año, sigue teniendo una parte de Aritmética y una de Geometría, y la modificación de este último no afecta a la enunciación de los tres capítulos dedicados a los paralelogramos. La única modificación es el reemplazo del capítulo de simetría central y axial por el de transformaciones del plano en sí mismo, que incluye las simetrías como un caso de transformación.

Las que son mucho más explícitas respecto del sentido del cambio propuesto son las "Normas para el desarrollo de los programas de matemática del ciclo básico", que acompañaron la resolución 1772/65, especifican, para cada uno de los tres años, los temas nuevos y las indicaciones para la enseñanza de la aritmética, la geometría y el álgebra.

Se dice allí que "sin modificar los contenidos de los programas vigentes se ha considerado introducir temas nuevos para favorecer una actitud del profesor acorde con una moderna conducción del aprendizaje y con la mayor o menor importancia que debe asignar a los temas tradicionales". Se dice también que la aritmética, la geometría y el álgebra son aspectos de una sola disciplina que es la matemática, y que se procurará señalar las relaciones mutuas entre ellos, siempre que se presente la ocasión.

Focalizando el rastreo en las Normas especiales para la geometría, se dice que se destinen dos horas semanales a su enseñanza, que se apele en lo posible al descubrimiento intuitivo de propiedades estimulando la participación activa de los alumnos, pero no eliminar la demostración (salvo las evidentes para el alumno) ni mucho menos descuidar el razonamiento deductivo. Además se propone el uso del material concreto (varillas, plegados) como auxiliar didáctico, con criterio dinámico y relacional.

Con respecto a la demostración y el razonamiento se dice las Normas mencionadas:

> *"Corresponde al profesor establecer dentro del tiempo disponible y la preparación del curso, cuáles propiedades serán introducidas por la vía intuitiva y cuáles serán objeto de una demostración lógica rigurosa; pero, en todos los casos se orientará al alumno en el descubrimiento de la relación que se busca, ya sea mediante preguntas graduadas verificaciones particulares o el empleo de material concreto. Se estima fundamental una adecuada ejercitación donde se apliquen o integren propiedades estudiadas o donde se puedan descubrir otras mediante razonamientos sencillos.*

Por la economía de tiempo que supone, se estimulará la demostración oral de propiedades que los alumnos pueden hacer por sí mismos, pero se insiste en el uso apropiado del lenguaje y en el orden lógico de las cadenas deductivas."

Es interesante destacar que el orden de introducción de las nociones es inverso al de su producción histórica, comenzando con la definición de objetos son más recientes y generales y luego presentando otros resultados más antiguos y menos inclusores como derivados de ellos

Aunque no corresponde a los contenidos ni normas para segundo año, resulta ejemplificador lo explicitado en las correspondientes a tercer año respecto de un tema nuevo en el ciclo: vectores en el plano. La secuencia de introducción de las nociones y las demostraciones es la siguiente: primero definir el producto escalar, luego presentar la propiedad distributiva del producto escalar, en tercer lugar demostrar el teorema del coseno, como consecuencia de la propiedad, y por último demostrar el teorema de Pitágoras, como caso especial del teorema del coseno.

La transición del período III al período IV

La nueva orientación para la enseñanza de la matemática en el período IV, aparece en varios documentos, y no todos ellos muestran la misma concepción al respecto. Tienen sin embargo puntos comunes, que la diferencian de la enseñanza en el período anterior, y es a ellos que se hará referencia.

Para analizar el pensamiento de matemáticos se seleccionaron los que fueron consultados para la reforma de la enseñanza de la matemática de 1994, comprendida dentro de una reforma más amplia de los contenidos de enseñanza en todos los niveles y áreas. Se tomaron para analizarlo tres documentos incluidos en el libro denominado Fuentes para la transformación curricular, de la Dirección de Investigaciones educativas del Ministerio de Educación. El primero, fue coordinado por Cuenya, el segundo es de Fava y Gysin, y el último de Saiz. De cada uno se toman algunos elementos para dar cuenta de las concepciones del momento.

Con respecto de la matemática a enseñar considerada como actividad, se señala que hay que enseñar no sólo los conceptos que maneja sino también los procesos de pensamiento. Por ejemplo:

> *"es necesario que el énfasis de la enseñanza esté puesto sobre todo en el aspecto formativo del educando, el cual debe tender fundamentalmente a la adquisición de los procesos de pensamiento propios de la actividad matemática (...)"* (CUENYA, 1996: 15)

> *"la enseñanza en los niveles elemental y medio, no se trata de formar matemáticos, sino de enseñar a usar la matemática y educar en el método matemático (...)* (FAVA, GYSIN, 1996: 60)

> *"la matemática es sobre todo saber hacer, ...dirigimos nuestra mira a la adquisición de procesos de pensamiento, buscando la inculturación a través de un aprendizaje activo"* (FAVA, GYSIN, 1996: 60)

> *"Saber matemática no es sólo aprender las definiciones y los teoremas, para reconocer después la ocasión de utilizarlos y aplicarlos; sabemos bien que hacer matemática implica ocuparse de problemas."* (Brousseau, en SAIZ, 1996: 116).

Con respecto a los contenidos de enseñanza, una modificación sustantiva es la desaparición de la teoría de conjuntos en la EGB, pues como su problemática de origen, es la de la construcción de sistemas axiomáticos, su introducción se reserva a niveles superiores.

> *"Consideramos que, si bien el alumno debe entrar paulatinamente en contacto con la formalización a través de plantear hipótesis, generalizar, conjeturar y demostrar teoremas, tales actividades no deben constituir el eje central de la enseñanza de la matemática en estos niveles".* (CUENYA, 1996: 18)

Con la idea de destacar la actividad matemáticas, se la describe como un quehacer que consiste en:

> *"resolver problemas aún no resueltos. Emite hipótesis, busca caminos alternativos, abandona aquellos que no lo conducen a los resultados deseados, etc."* (SAIZ, 1996: 114)

Aparecen como conteñido de enseñanza los procedimientos, y en particular los de resolución de problemas:

> *"Contenidos procedimentales para la resolución de problemas*
> - *Reconocimiento, selección, organización y tratamiento de los datos pertinentes para la resolución de un problema.*
> - *Formulación, comprobación o modificación de conjeturas a partir de los datos del problema o de los resultados intermedios.*
> - *Formulación, elaboración y comunicación del proceso seguido en la resolución de problemas con interpretación de los distintos cálculos realizados.*
> - *Argumentación de la validez de una solución.*
> - *Elaboración de estrategias en verdaderos problemas de investigación de cuestionamientos a partir de un conjunto de datos."* (SAIZ, 1996: 111)

Con respecto a la demostración y su enseñanza, los documentos contienen diferentes explicitaciones para su introducción en el tercer ciclo:

> *"Es en el Tercer Ciclo de la EGB donde creemos que se debe iniciar una profundización del método matemático, en el sentido de introducir gradualmente al alumno a la idea de demostración deductiva y su necesidad"* (CUENYA, 1966:19)

También se encuentran referencias para su introducción aún antes del tercer ciclo como parte de la clase de matemática, que incluirá momentos de debate entre los alumnos respecto de sus respectivas producciones como respuesta a un problema planteado. Este debate sobre lo producido, es el marco en el que aparecen algunas de las reglas de validación propias de la comunidad matemática, para permitir su apropiación por parte de los alumnos:

- Un enunciado matemático es verdadero o falso;
- Un contraejemplo es suficiente para invalidar un enunciado;
- En matemática, para debatir hay que apoyarse en un cierto número de propiedades o definiciones claramente enunciadas sobre las cuales hay un acuerdo (axiomas);
- En matemática, dar ejemplos que verifiquen un enunciado no es suficiente para probar que es verdadero.

El documento curricular fundamental de este período, por la amplia consulta a que dio lugar su elaboración es el de los Contenido Básicos Comunes para la Educación General Básica, los CBC para la EGB, cuyo proceso de elaboración fue organizado y coordinado por la Dirección General de Investigaciones Educativas.

Si bien en los años 80 se habían realizado en algunas jurisdicciones documentos curriculares más completos y complejos que los iniciales planes, programas y normas, éstos se ocupaban de la enseñanza primaria. Para la enseñanza media, los CBC constituyen las nuevas orientaciones oficiales comunes a todo el país.

Una diferencia esencial de los CBC con otros documentos anteriores es que se convirtieron en prescripciones para las escuelas cuando inicialmente no fueron elaborados con ese sentido dado que en él los contenidos están organizados por ciclo (tres ciclos de tres años) y no por año. Si bien se inició un proceso para que cada jurisdicción elaborara un DCP para sus escuelas con una secuenciación por año, en algunos casos no se concluyó, y en otros el DCP no avanza en esa distribución.

El capítulo de Matemática de los CBC, tiene varios componentes. Una Introducción y ocho bloques de contenidos, seis de conceptuales, uno de procedimentales y otro de actitudinales. Cada bloque tiene una síntesis explicativa y expectativas de logro al finalizar la EGB.

Con respecto a la noción de paralelogramo, indagando en el bloque 4 de Nociones geométricas, en la columna correspondiente al 3er. Ciclo (antes 7mo grado de primaria y 1ero y 2do. años de media), se encuentra que no se explícita como contenido. Sin embargo, aparecen otros que se pueden relacionar con esta noción, pues forman parte de la misma red conceptual. En los contenidos conceptuales dice brevemente: "Figuras: polígonos, elementos, propiedades, construcciones de figuras con regla y compás", y en los contenidos procedimentales: "Relaciones entre propiedades de una misma figura y de figuras entre sí. Clasificación, descripción, construcción, y representación de formas planas"

Es en el segundo ciclo de EGB, donde aparecen explícitamente los contenidos que se rastrean en este estudio. Dice en los conceptuales: "Elementos y propiedades de triángulos y cuadriláteros. Construcciones con regla y compás", y en los procedimentales: "clasificación, reproducción, descripción y construcción de formas planas".

Es decir que los paralelogramos, como parte de los cuadriláteros se trabajarían en el segundo ciclo, y en el tercero, se ampliaría a los polígonos convexos.

En el bloque siete de Procedimientos Generales del Quehacer Matemático, se han encontrado referencias al razonamiento y la demostración. Uno de los tres ejes de este bloque es el de "procedimientos vinculados al razonamiento", entre los que se mencionan una serie de contenidos ligados a las formas de razonamiento inductivo y deductivo, uso del contraejemplo, detección de inconsistencias en el razonamiento, formulación de argumentos lógicos, demostraciones sencillas, uso de términos como: necesario, suficiente, si y sólo si.

También los contenidos de este eje se articulan con los del segundo ciclo, donde aparece "investigación de la validez de generalizaciones" y "uso de la negación, cuantificadores y los conectores y y o", y con los contenidos del primer ciclo "explorar la validez de los procedimientos y resultados".

En la Síntesis explicativa de este eje se mencionan como formas de llegar al conocimiento, la inductiva, la deductiva y la intuitiva. Se propone que el alumno sepa " plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y si es posible demostrar, sin exigencias de formalización extrema que impiden apreciar los procesos que conducen a los resultados".

Se explica con detalle las tres formas de llegar al conocimiento, y luego se propone que el alumno desarrolle "la capacidad de detectar inconsistencias en razonamientos propios y ajenos", y la de "razonar lógicamente", considerados, recursos esenciales para hacer progresar sus conocimientos y manejarse en la sociedad con autonomía.

A modo de conclusión sobre los períodos y las transiciones en las orientaciones para la enseñanza

La comparación entre los cuatro períodos delimitados muestra diferencias y una evolución con respecto a cada uno de los aspectos señalados:

- ✓ La concepción de matemática a enseñar y el rol de la demostración
- ✓ El aprendizaje, la enseñanza y la formación del razonamiento deductivo
- ✓ La demostración y el razonamiento en los componentes del curriculum

Sobre la concepción de matemática a enseñar y el rol de la demostración en ella que se desprende de los materiales relevados, se va modificando a lo largo de los cuatro períodos delimitados, como se desarrolla a continuación.

Tanto en el primero como en el segundo período, se presenta la Matemática como *un cuerpo de conocimientos organizado deductivamente*, y en el caso de la geometría con la sistematización euclidiana. Es una presentación rigurosa, expresada en un lenguaje en el que se alude a las figuras, sus elementos y propiedades. Los objetos de la geometría son las figuras consideradas como objetos ideales, y los postulados son las propiedades aceptadas como evidentes de acuerdo con la observación y la experiencia. Las proposiciones tienen un carácter absoluto, universal y necesario, sea porque son postulados evidentes, o porque ese han derivado de ellos deductivamente.

Entre el primer período y el segundo, se advierte una modificación en el lugar que se da a la demostración en la disciplina. En ambos períodos aparece como el *método de la matemática*, aquel que permite obtener nuevas propiedades sobre los objetos ideales definidos. Es el modo en que se establecen relaciones de carácter deductivo, el razonamiento aparece como una serie de deducciones, por lo que la demostración es el modelo de pensamiento matemático. La diferencia consiste en que la resolución de problemas, en el primer período se encierra en una concepción estrictamente deductivista que desconoce los comportamientos heurísticos, mientras que en el segundo período, se admite la necesidad de dar lugar a procedimientos tanto inductivos como deductivos para desarrollar la capacidad para la actividad original. Es decir que se acepta que los problemas requieren del uso de otras formas de razonamiento, aunque la demostración sigue siendo el modelo ideal, y el único modo de garantizar la validez de los resultados, por lo que habrá que demostrar aquello que se obtuvo por vía inductiva. Hay alguna evolución en la consideración de la demostración como modo de validación.

En el tercer período se presenta la matemática con su *estructura formal, regida por la lógica* y con mayor el rigor posible considerando las capacidades cognitivas de los alumnos. Se pretende mostrar en la escuela la racionalidad matemática posterior a la crisis de sus fundamentos[10], en la que las proposiciones no tienen más el carácter absoluto de verdades, sino que son no contradictorias en un sistema de axiomas. Por eso ante las dificultades lógicas de la geometría euclidiana, se elige presentar los objetos de la geometría definidos desde la teoría de conjuntos, e interesa más mostrar las relaciones entre las figuras (se agrupan en conjuntos y subconjuntos según las propiedades que cumplan) que obtener sus propiedades en forma deductiva. La presentación axiomática pasa al dominio del Álgebra.

En este tercer período, la demostración es la *herramienta fundamental de la actividad matemática*, la que le asegura su rigor sobre la base del uso de reglas lógicas. Sin embargo, para este ciclo no se pretende un tratamiento formal, y se reserva su uso en la enseñanza sólo para los casos en que pueda aparecer su carácter de instrumento que permite comprender mejor lo no evidente. Dado que las concepciones de aprendizaje vigentes en la época, exigen apoyarse en una práctica experimental o de manipulaciones concretas, se

[10] Se conoce como crisis de fundamentos, a la que sobrevino cuando se comenzaron a cuestionar las bases lógicas de la matemática.

acude a ellas para presentar nociones abstractas, pero funcionan como un trabajo anterior y exterior a la matemática misma, en su interior la marcha es deductiva.

En el cuarto período, la matemática se presenta como la *actividad de resolución de problemas de una comunidad científica*, mediante conceptos y procedimientos de diverso tipo. Procedimientos relativos a las estrategias de resolución, los diversos modos de razonamiento y los modos y lenguajes de comunicación. Los conceptos aparecen un doble status, de instrumento es decir como recurso que permite resolver diversos problemas, y de objeto, es decir como parte del conjunto de saberes de la ciencia. En esta presentación lo que se pone en primer plano es la cultura matemática, el hacer matemática.

Como los procedimientos pasan a ser un contenido explícito de enseñanza, entre los de razonamiento se mencionan varios la argumentación sobre la validez de lo producido en la resolución, las reglas válidas del debate matemático, y *la demostración deductiva como un instrumento de validación privilegiado.*

En cuanto a las concepciones de aprendizaje y de enseñanza y en particular la enseñanza del razonamiento, también se han ido modificando a lo largo de los cuatro períodos.

En el primer período, el aprendizaje consiste en la memorización mecánica de teorías formales y abstractas, de tal modo que su significado en general es inaccesible al adolescente. Es poco relevante el papel dado a la ejercitación práctica, y se considera que el alumno aprende si puede recitar sin fallas ni faltas el texto del saber preparado para la enseñanza. La enseñanza consiste entonces en la exposición de las definiciones y teoremas (la teoría matemática) y sus aplicaciones, en general escrita en el pizarrón. La actividad fundamental del alumno es copiar y luego memorizar, pudiendo reservarse un pequeño espacio a la realización de ejercicios de aplicación, donde deben utilizar la teoría memorizada.

Si bien se considera el aspecto formativo de la enseñanza de la matemática, se lo hace considerando que la matemática es per se, disciplinadora de la inteligencia, por exposición del alumno a su método. La formación del razonamiento no se considera objetivo ni contenido de enseñanza, por lo tanto no es una responsabilidad del profesor formar el pensamiento de los alumnos, éstos tienen o no la capacidad de razonar y aprenderán a hacerlo deductivamente repitiendo los teoremas expuestos.

En el segundo período, interesa lograr la comprensión del alumno, por lo que se recurre no sólo a exponer la teoría de manera deductiva, sino también a dar ejemplos antes o en lugar del desarrollo deductivo, aclarando siempre que éste no se ha realizado. También el docente puede plantear la resolución de problemas por distintos caminos cuando quiere encontrar una solución, pero es necesario demostrar que esa solución es la correcta por el método deductivo". Si bien hay mayor insistencia en la necesidad de involucrar al alumno, mediante la realización de mayor cantidad de ejercicios, éstos resultan de aplicación de lo ya explicado y aún de repetición de las mismas actividades ya realizadas por el profesor, con otros datos.

También en este período, se considera que la Matemática forma el razonamiento deductivo, pero hay una confusión entre este proceso y el de resolución. De ello se podría concluir que quien puede resolver, podrá razonar deductivamente, lo que es una simplificación de las formas de razonamiento que intervienen en la resolución. La enseñanza del razonamiento es un propósito pero sin que esto se traduzca en alguna norma o responsabilidad para el profesor al respecto.

En el tercer período, que coincide en el país con la llegada de las teorías constructivistas, el aprendizaje se concibe como un logro de cada alumno en interacción con su medio. En la interpretación de los estadios piagetianos, un estudiante del primer ciclo de la escuela media transita hacia el pensamiento formal pero éste tiene aún las características del operatorio concreto, y como los estadios funcionaban como reguladores de los contenidos, muchos fueron eliminados por considerarse fuera de las capacidades operatorias de los alumnos. Por otra parte, en una primera traducción de esta teoría epistemológica para la pedagogía, se consideró que el aprendizaje se daba por las acciones de los alumnos sobre materiales concretos puestos a su disposición. El descubrimiento de conocimientos que debía derivar de la manipulación, iba estructurando el pensamiento del alumno. La enseñanza estaba centrada en la elección de esos materiales que, se pensaba, permitía una primera aproximación intuitiva a los objetos matemáticos.

En cuanto a la demostración, y si se consideran las exigencias de rigurosidad derivadas de una matemática formalista, resulta que es inaccesible a los alumnos de esta edad. Se consideraba que para producir una demostración, un alumno debía entrar en las reglas de juego. Y en esta concepción, un alumno entra o no en esas reglas, con lo que si no puede demostrar con rigor lógico, sólo puede seguir las demostraciones del profesor. Por eso, si bien se promueve que los alumnos expresen oralmente demostraciones, se pide asegurar la adecuación del lenguaje utilizado. Las pruebas producidas sin el uso de un lenguaje riguroso, no se pueden interpretar como parte de un proceso, como un acercamiento desde otras formulaciones, desde otras formas de validación.

La formación del pensamiento matemático es un claro objetivo en este período, y se considera que la inclusión de contenidos de lógica colaborará con su enseñanza. Sin embargo, está claro que no confían en que el estudio de las reglas lógicas alcance para razonar bien, sino que esto se logra con una práctica continuada de matemática.

En el cuarto período, el aprendizaje de la matemática, es concebido como derivado de instalar en el aula una comunidad clase que produzca soluciones y las debata ante la presentación de problemas que se le proponen para resolver. Se produce aprendizaje por adaptación de los conocimientos anteriores a las nuevas situaciones donde pueden ser utilizados como recurso, y la interacción con los pares, es también fuente de aprendizaje, de evolución de los conocimientos.

La enseñanza está asociada a la elección de problemas que puedan considerarse tales para la clase desde el punto de vista cognitivo, y a su gestión en un contrato didáctico con características particulares. Los problemas habrá que elegirlos de manera que todos los alumnos puedan entrar en ellos, iniciar alguna estrategia de resolución, de modo que no es obstáculo sino un factor de enriquecimiento la diversidad de puntos de partida en cuanto a los conocimientos, los diferentes ritmos y estilos de interacción.

La validación de los conocimientos que se producen en la clase es parte de las prácticas habituales, y en ese marco, el uso de argumentaciones y diferentes modos de prueba, y entre ellos la demostración puede ser pensado didácticamente.

El razonamiento aparece en esta concepción, atravesando todo el proceso de resolución, en sus diferentes formas, y cada una podrá ser delimitada en su uso en función de las situaciones, momentos e intenciones con que se los use en una resolución. No podrá ser enseñado independientemente de la construcción de una racionalidad sino que es uno de sus elementos componentes, y tal racionalidad irá evolucionando en el grupo clase a medida que nuevas situaciones muestren los límites de los conocimientos que se poseen.

La actividad de demostrar se considera como una etapa en la evolución de las formas de validación ligadas al uso del razonamiento deductivo, y por lo tanto se propone una secuencia didáctica desde el primer al tercer ciclo para su enseñanza.

Con respecto la demostración y el razonamiento en los componentes del curriculum se ha encontrado que las orientaciones que regulan la enseñanza, son presentadas a las escuelas mediante documentos que tienen diferentes componentes a lo largo del período estudiado. Asimismo se ha ido modificando el lugar que en esas orientaciones tienen las dos cuestiones mencionadas.

En los dos primeros períodos, estos documentos incluyen solamente un programa de contenidos. La completa explicitación de las definiciones y propiedades en el primero, puede deberse a la necesidad de instalar entre los profesores, una primera especificación del alcance de los contenidos. Por la misma razón pero con algunos años en que esos contenidos ya han sido enseñados, en el segundo período, la enunciación de los contenidos es más breve. Es decir que se podría interpretar que ya hay entre ellos un significado compartido respecto del repertorio a las que se alude, por ejemplo bajo el título "propiedades". La secuencia de presentación de contenidos se presupone como la misma que el docente usará en el aula, sigue un criterio disciplinar que es el de la presentación deductiva.

La enseñanza del razonamiento deductivo y la noción de demostración no aparecen en los dos primeros períodos, en las orientaciones regulatorias de la enseñanza. Es posible que esto se deba a que la formación del pensamiento deductivo es una cuestión que encuentra su lugar entre los propósitos y éstos no aparecen como componente de los documentos.

En el tercer período, los documentos consisten en un programa y unas Normas para su desarrollo que contienen lo que hoy se podría denominar orientaciones didácticas. Son "indicaciones" sobre los "temas nuevos", referidas al tratamiento de los mismos, cómo introducirlos (en forma intuitiva o formal), el tipo de ejemplificación, representaciones y lenguaje a utilizar, y también indicaciones sobre el tratamiento de los temas ya conocidos de "aritmética" y de "geometría", como el uso de materiales didácticos, cantidad y tipo de ejercitación, forma de presentación de las propiedades en geometría y el cambio de los ejercicios de cálculo por los problemas en aritmética.

Pareciera que estas Normas están elaboradas con dos propósitos, instalar nuevos contenidos y cambiar el orden y jerarquización de los que ya se enseñan, y también modificar las prácticas de enseñanza existentes. La secuencia de presentación combina un criterio disciplinar con uno sicopedagógico, la estructura de la disciplina articulada con la participación activa y las capacidades cognitivas de los alumnos.

A partir del tercer período, siguen sin aparecer en los contenidos ni el razonamiento deductivo ni la demostración, pero se incluye en las Normas la necesidad de formar el pensamiento deductivo como parte de las orientaciones didácticas. Cuando plantea "algunas cadenas deductivas podrán hacerse oralmente", como modo de mejorar el uso del tiempo, no queda claro cuál es la estrategia del docente que permitirá al alumno producir tal cadena. La demostración sigue asociada a la forma de presentación de los contenidos cuando no son evidentes para el alumno, es decir como modelo de pensamiento matemático y no asociada al trabajo del alumno. Con lo que hay una contradicción entre la intención de formar el pensamiento matemático y no dar lugar al alumno a realizar demostraciones.

En el cuarto período, los documentos contienen una introducción con propósitos de la enseñanza, unos bloques de contenidos que incluyen además de los listados organizados con criterio disciplinar, una síntesis explicativa donde se explicita el sentido de su y las expectativas de logro, es decir lo que se espera que los alumnos lleguen a aprender, que puede interpretarse como unas orientaciones para la evaluación.

Los documentos curriculares en este período, pareciera que intentan subsanar desde la prescripción varias problemáticas de enseñanza: la escasa articulación de los contenidos, la escasa claridad de los docentes respecto de la fundamentación de su práctica, el desconocimiento de la evaluación como parte de los procesos de aprendizaje y de enseñanza, la necesidad de evaluar competencias (capacidades en acción que incluyen el uso de conceptos y procedimientos en situación). La secuenciación de contenidos, atiende a criterios didácticos, para cuya elaboración se incluyen las cuestiones disciplinares, las ligadas al aprendizaje y también las de la enseñanza. Sólo en este período, se deja de lado la ilusión de que el objeto de enseñanza, calque el objeto de saber.

En el cuarto período, la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración aparecen en la síntesis explicativa que determina el alcance y el sentido de los contenidos y en los listados de los mismos, del bloque de Procedimientos Generales del Quehacer Matemático de los CBC. La demostración está planteada como herramienta de validación propia de la matemática, y el razonamiento deductivo como una de las formas de llegar al conocimiento.

Inclusive se orienta sobre el tipo de actividades a desarrollar en el aula, y el papel de los alumnos y del docente en dichas actividades.

Sintetizando este capítulo, puede destacarse, en el marco de la evolución de los documentos regulatorios de la enseñanza, y en relación con las orientaciones que brindaron para las transformaciones los libros de los matemáticos destacados, es posible delinear los cambios que se dieron en la enseñanza de la demostración y la formación del pensamiento.

Que la enseñanza de la Matemática tiene un papel en la formación del pensamiento de los alumnos, y que ese papel está centralmente dado porque brinda la posibilidad de formación en el uso del razonamiento deductivo, uno de los elementos que constituyen su racionalidad, es una cuestión que se constata en los escritos de los matemáticos de todos los períodos.

Sin embargo, tal intención formativa no está expresada en los documentos de los dos primeros períodos, tal vez como segunda razón porque no estaba habilitado el espacio para incluirlo en los documentos regulatorios. Pero la razón fundamental, es que se pensaba que la sola exposición al conocimiento organizado deductivamente, habría de generar tal formación.

En el tercer período comienza a ser incluida la necesidad de enseñar a razonar en las que se considerãron como orientaciones didácticas de las prescripciones, porque se entiende que el alumno deberá tener un rol activo en el aprendizaje. Debe resolver problemas y se supone que aprenderá a razonar deductivamente con la práctica continua de resoluciones, para las cuales sólo se admite como válido el uso del razonamiento deductivo. Otras formas de razonamiento se admiten fuera del proceso de resolución de problemas.

En el cuarto período en los documentos regulatorios, la formación del pensamiento es un propósito de la enseñanza, y los tipos de razonamiento inductivo y deductivo incluidos en las orientaciones didácticas como distintas formas de llegar al conocimiento, es decir como parte de lo heurístico en la resolución de problemas.

No hay unanimidad sino cambios en cuanto a la enseñanza de la demostración.

Comienza siendo considerada en los dos primeros períodos, y aún en el tercero, el método de la matemática, asociada a la producción de conocimientos y confundida con la totalidad del proceso de resolución de problemas. Culmina en el último período, como uno de los instrumentos de prueba usado en el proceso de resolución, el que se atiene a las reglas lógicas y por ello garantiza la validez en la comunidad del resultado producido.

En los dos primeros períodos el alumno debe copiar o comprender demostraciones hechas por otros, en el tercero podrá demostrar más adelante pero no en el primer ciclo de la escuela media. ¿Cómo se articula esto con el propósito de formar en el razonamiento deductivo?, sólo resolverá deductivamente problemas que permitan otras formas de validación, los de contexto extramatemático.

En el último período, la resolución se concibe como un proceso que incluye diferentes momentos de validación en su transcurso, y que también incluye momentos en los que el pensamiento funciona más con una intención de investigar caminos que de controlar lo que se ha hecho hasta allí, más en la exploración de posibilidades que en la búsqueda de la certeza.

Sin embargo, no se plantea aún con claridad que la demostración es una forma de validación más exigente que otras pruebas pues implica la constitución de una racionalidad en la que no sólo interesa la forma de abordar los objetos, sino el status de los objetos mismos y el lenguaje utilizado para su tratamiento. Tampoco aparece la actividad de demostrar como la que permite construir la racionalidad matemática.

5. LA DEMOSTRACIÓN EN LOS TEXTOS PARA LA ENSEÑANZA MEDIA

Retomando los planteos y análisis iniciados en el capítulo cuatro sobre la demostración como objeto de enseñanza, en el presente capítulo se toman los textos para los estudiantes del primer ciclo de la enseñanza media considerados de peso a lo largo del período en estudio, por su aceptación por parte de los profesores.

Los textos constituyen otra instancia de la transposición didáctica pues introducen nuevas modificaciones en los objetos de enseñanza, constituyen una nueva y más fina delimitación del alcance de los contenidos. En algunos casos, frente a la insuficiencia de orientaciones oficiales, o la falta de ajuste periódico de las mismas, los libros de texto se constituyen para los profesores en una fuente en la que abrevar en la búsqueda de un parámetro de comparación de sus propios conocimientos disciplinares, de una clarificación respecto del tipo de actividades a realizar, de propuestas innovadoras en la articulación y organización de los contenidos a enseñar.

En el relevamiento de textos, inicialmente se tomaron los correspondientes a cualquiera de los tres años del primer ciclo de la escuela media o tercer ciclo de EGB, de autores nacionales y también algunos de origen español (GUZMÁN, COLERA y SALVADOR) o francés (PAPY) que han tenido uso entre los profesores en la Argentina. Luego se focalizó en quince textos de autores nacionales y para segundo año del ciclo básico, o para 8vo. y 9no. año de EGB, para poder establecer alguna comparación en el inicio de la presentación de la demostración en el ciclo. Es necesario señalar aquí que en 8vo.año de EGB cursan alumnos cuya edad es la de los de 1er. año del ciclo básico, pero se han tomado los libros de 8vo. y no los de 9no. porque también ha habido, con el cambio de estructura de los niveles del sistema una nueva distribución de los contenidos.

De los primeros trabajos de análisis de alrededor de doce libros de texto para el año elegido, se han seleccionado cuatro por ser los más relevantes en su época por su uso y su peso cultural. (ver Cuadro: Reformas y textos en la historia de la enseñanza de la Matemática).

Para el período que va desde 1950 a 1956, se eligió el de REPETTO, LINSKENS y FESQUET en la edición de 1952 que responde al período 1 y los contenidos anteriores a la reforma del 56. Para el período 2, de 1956 a 1965, otro libro de las mismas autoras del año 1967 cuyos contenidos son los propuestos en la reforma del 56. Para el período 3, de 1965 a 1995, se tomó el de TAPIA, TAPIA y BIBILONI cuya primera edición fue del año 1975 y toma las orientaciones de la reforma de 1965. Para el período 4, posterior a la reforma de 1995 se ha seleccionado el de GUELMAN, ITZCOVICH, PAVESI, RUDY. También se analiza un quinto libro, que puede ser considerado de transición entre el tercero y cuarto período, el de SADOVSKY, KASS, PANIZZA, y REYNA de 1989, por ser el primero que incluye una referencia tematizada a la demostración.

Entre los múltiples aspectos considerados en la lectura y análisis de los textos seleccionados se ha privilegiado en primer lugar una lectura general del mismo, y luego una lectura más pormenorizada de sus componentes. Ciertos interrogantes colaboraron en este estudio, y han sido organizados en torno a las problemáticas siguientes:

- ✓ *Sobre las decisiones tomadas en la organización del texto y la demostración en él.*
  ¿La demostración en el libro es objeto de reflexión explícita? ¿ ¿En qué "ambiente" aparece en el texto?. ¿Es o no objeto de enseñanza? ¿Qué lectura puede hacerse del índice? ¿Cómo está organizado cada capítulo?

- ✓ *Sobre la concepción de matemática a enseñar, la racionalidad y el lugar de la demostración en ella.*
  ¿Cómo se presenta la matemática? ¿Qué concepción de los objetos matemáticos, son invenciones, se descubren o son construidos? ¿La demostración, es herramienta de validación o modelo de la actividad matemática? ¿Lo deductivo se presenta en relación con qué status de los objetos matemáticos? ¿En geometría, el rol de la figura, es mostrar o demostrar, es decir se induce al alumno a aceptar lo que aparece en el dibujo como prueba? ¿Cómo se establecen conjeturas y cómo se validan? ¿En geometría, se habla de propiedades y teoremas pero pide verificar en el dibujo? Si es en álgebra se demuestran las conjeturas obtenidas inductivamente?

✓ *Sobre la noción de paralelogramo.*

¿El objeto "paralelogramo" en relación con qué conocimientos aparece?, ¿Qué conocimientos se consideran previos? ¿Se presenta esta noción en su carácter de objeto de la ciencia, descontextualizado, o en su carácter de herramienta, contextualizado? ¿Hay problemas? ¿Problemas intra o extramatemáticos? ¿Cómo aparece la demostración en relación con la noción de paralelogramo?

✓ *Sobre las propiedades demostradas*

¿Se llama teorema a una serie de relaciones no demostradas, sólo enunciadas con lo que se vacía de sentido la palabra teorema?. ¿Se dice condición necesaria y suficiente cuando están los dos teoremas? ¿ Hay alguna indicación sobre el dominio de validez de las propiedades demostradas, alguna alusión a generalización? Y que ocurre con los teoremas recíprocos? ¿Se trabaja de algún modo cuando existen y cuando no existen?

✓ *Sobre la preparación didáctica de la demostración*

¿Se ha realizado un recorte respecto de la demostración? ¿hay "temporalización" y secuenciación de las formas de razonamiento en general y del razonamiento deductivo en particular? es decir, ¿se plantea cómo entra al sistema y cómo evoluciona en él la enseñanza de formas de razonamiento en general o del razonamiento deductivo?.

✓ *Sobre las prácticas docentes inducidas y la representación del aprendizaje del alumno en relación con el razonamiento y la demostración*

¿El docente es inducido a la exposición del saber, a plantear el descubrimiento, a proponer problemas? ¿Se habitúa al alumno a generalizar y a encontrar diferencias entre lo particular y lo general? Cuando se pide demostrar, ¿hay preguntas intermedias o alguna otra guía para el alumno? ¿Se explicitan, construyen o ignoran las reglas válidas? ¿En la actividad del alumno es posible alguna de las duplas: convencer - sistematizar o comprender – descubrir?

Textos paradigmáticos en cada período

Libro Geometría - Segundo curso - Repetto, Linskens, Fesquet.

Este libro analizado es la edición 4° edición (la 1° es de 1940) y se presenta en dos volúmenes, uno de Aritmética y otro de Geometría tal como el programa del curso, del que el índice del texto es una copia. En el de Geometría, aparecen 11 capítulos cuyos títulos aluden a objetos matemáticos de diverso tipo, como figuras geométricas (circunferencia y círculo o cuadriláteros), relaciones (como posiciones relativas de una recta con respecto a una circunferencia, u operaciones como multiplicación de segmentos. Cada uno incluye la enunciación completa de las propiedades y si existen sus recíprocas, así como también de las construcciones cuyos procedimientos se van a desarrollar, indicando además cuáles serán en cada caso los datos de partida. Se explícita también que se incluyen "ejercicios de aplicación". (Anexo I a V)

Cada capítulo está organizado en varias partes, una para cada noción tratada. Cada parte incluye dos tipos de presentaciones, una o más definiciones y teoremas relativos a las propiedades de los objetos definidos, y ejercicios de aplicación, entre los que se incluyen construcciones geométricas. (Anexo VI a XVI).

Las nociones matemáticas aparecen en su presentación descontextualizadas, en su carácter de objetos de la ciencia. Todos los teoremas, tanto directos como los recíprocos están demostrados. Se presenta una figura como apoyo para seguir el razonamiento, pero ésta es considerada como un dibujo al cual hay que agregar datos para poder razonar, no se pretende mostrar sobre el dibujo. En algunos casos se deduce de una propiedad demostrada, una condición necesaria y suficiente (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1952, 33).

En los ejercicios de aplicación se propone al estudiante realizar demostraciones, y también realizar cálculos para el caso de las propiedades métricas (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1952, 26/27). Las construcciones explicadas paso a paso, si es posible se desarrollan con más de un procedimiento, y al finalizar se plantea la condición de posibilidad de cada una, es decir para qué valores o relaciones entre los datos es posible construir la figura pedida (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1952, 27 y 28). Las explicaciones sobre las construcciones se hace razonando sobre una figura de análisis que aparece en el texto. Si bien las construcciones que se plantean como ejercicio a resolver, son otros ejemplos de las ya explicadas con diferentes datos, en algún caso se propone realizar alguna no explicada (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1952, ejercicio 15, pág. 29).

Se puede inferir que esta organización refiere a las concepciones de enseñanza y de aprendizaje. El profesor explica el saber en su carácter de objeto, y también su uso como instrumento por ejemplo en la construcción de figuras, tratando de ser lo más fiel posible a la versión escolarizada del conocimiento en que la definición para cada objeto es única, así como el tipo de simbolización utilizada para representarla.

Las actividades para el alumno son ejercicios de aplicación. El estudiante ejercita y aplica el conocimiento. Puede aplicar el conocimiento porque lo aprende acabado, cada objeto con todas su propiedades y cada una de éstas con el dominio de validez adecuado, relacionado con otros objetos del mismo campo. No se apela a la comprensión del estudiante, sino a que entre en el juego deductivo de partir de premisas y arribar lógicamente a la conclusión. Si lo hace, quedará convencido de que ésta es irrefutable, pero ¿cómo entra en el juego?.

Las construcciones nuevas, con datos diferentes que se proponen en algunas listas de ejercicios de aplicación, podrían ser consideradas problemas intramatemáticos desde una mirada actual, sólo que en el marco de un contrato didáctico como el que se infiere del texto, el alumno no tiene concibe la resolución de problemas como práctica matemática si no lo hace usando como modelo de razonamiento el deductivo.

Esto supone presentar la Matemática como un cuerpo de conocimientos organizado, en la que se suceden definiciones teoremas, corolarios y construcciones. La actividad matemática no aparece más que a través de sus resultados y en particular la geometría según la sistematización de Euclides cuyos enunciados son los axiomas de partida o los derivados deductivamente de ellos. El orden en que se van presentando los conocimientos es el que impone proceder por deducción. Los objetos de la geometría son figuras, objetos ideales dados mediante una definición, y la demostración funciona aquí como un instrumento que permite encadenar nociones y propiedades.

La noción de paralelogramo aparece como parte del capítulo 4, en el que también se desarrolla la noción de trapecio. Los paralelogramos son presentados como cuadriláteros con propiedades particulares. Este capítulo está antecedido por la presentación de otros con nociones más generales, como los polígonos convexos y los cuadriláteros. También en el capítulo de paralelogramos se toman primero los paralelogramos en general y luego los tres paralelogramos especiales: cuadrado, rombo y rectángulo.

Aunque no forma parte del recorte realizado en este estudio el libro de aritmética del mismo año, conviene señalar por la diferencia con otros textos analizados, que la demostración también aparece en el libro de Aritmética, por ejemplo al presentar las propiedades de la potenciación.

Libro Geometría 2 - Matemática moderna – Repetto, Linskens, Fesquet.

Este libro considerado es la 17° edición, y también se presenta en dos volúmenes, uno de Aritmética y otro de Geometría. También en este caso, el índice va siguiendo el programa del curso. En el libro de Geometría, aparecen 12 capítulos numerados, que en algunos casos provienen de la unión de otros anteriores, y en otros casos se separan en dos o más capítulos los contenidos que están agrupados en uno solo en el libro analizado para el período anterior. Se incluye además antes del primer capítulo, una "Síntesis sobre nociones de relaciones" incorporadas luego de algunas ediciones en que estos contenidos se presentaron en un cuadernillo separado. En esta síntesis se presentan nociones conjuntistas, tal como lo indica el programa de 1965.

También en este caso los títulos aluden a objetos matemáticos de diverso tipo, como figuras geométricas (circunferencia y círculo o cuadriláteros), relaciones (como posiciones relativas de una recta con respecto a una circunferencia), o procedimientos (como construcción de paralelogramos) La enunciación del contenido del capítulo es muy breve, sólo se mencionan las figuras, si se desarrollarán propiedades sin especificarlas y sólo en algún caso mencionándolas por las figuras a las que se refiere "suma de los ángulos interiores de un polígono". También se anuncia que en cada capítulo se incluyen "ejercicios y problemas de aplicación". (Anexo XVII a XXI).

Cada capítulo está organizado en una (el 3) o más partes (el 12), una para cada noción tratada. Si bien vuelve a parecen la estructuración del capítulo en dos partes, una de presentación de los conocimientos y otra de actividades para el alumno, hay diferencias respecto de la cada una de estas partes con respecto a la 4ª edición ya analizada. (Anexo XXII a XXXVII). El capítulo de Paralelogramos, se divide aquí en tres, el 3 de paralelogramos en general, el 4 de paralelogramos especiales, y el 5 de construcciones geométricas.

En el capítulo 3 (y el mismo tratamiento tienen los contenidos del 4) , las definiciones clásicas como "se llaman paralelogramos los cuadriláteros que tienen dos pares de lados opuestos paralelos" se completan con ejemplos (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 56), y en algunos casos se presenta también una definición conjuntista, derivada de un apartado denominado "observación", en el que aparece un dibujo que ilustra la idea, por ejemplo "paralelogramo es un cuadrilátero determinado por la intersección de dos bandas secantes" (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 57). Al presentar las propiedades se retoma la noción de paralelogramos, apelando a la observación y medición de los paralelogramos dibujados, es decir a la vía experimental. Luego se presentan los paralelogramos como subconjunto de los cuadriláteros en relación con las propiedades que cumplen, simbólicamente (con el símbolo de inclusión entre ambos conjuntos) y con un gráfico (un diagrama de Venn).

También aquí se demuestran los todos los teoremas, directos y recíprocos, y en un apartado denominado también "observación", se relaciona teorema recíproco con condición suficiente (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 68). En las demostraciones de los teoremas, se usa una figura como apoyo para seguir el razonamiento, considerada como un dibujo. Entre una y otra demostración se incluyen explicaciones que parecen en el texto señaladas con un punto naranja en el comienzo, pareciera que con la intención de marcar que hay un cambio en el discurso. Por ejemplo se indica que una demostración puede hacerse por otro camino (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 62) o se explica coloquialmente una propiedad antes de demostrarla (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 64).

En los ejercicios y problemas de aplicación (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 72 y 73) se propone al estudiante tres tipos de tareas, realizar demostraciones, realizar cálculos para el caso de las propiedades métricas y buscar razones matemáticas para una situación extramatemática.

Las construcciones del capítulo 5 son un objeto de estudio con un status diferente al de ejercicio para la aplicación de propiedades. También son, como en el texto de la 4ª edición, explicadas paso a paso, si es posible se desarrollan con más de un procedimiento, se razona sobre la figura de análisis y se plantea la condición de posibilidad de cada una. Pero en esta presentación, al finalizar se incluye la justificación de la construcción, es decir, las propiedades que cumple la figura construida para asegurar que se trata de la que se pidió (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 84 y 85).

Al inferir de la organización del capítulo las concepciones de enseñanza y de aprendizaje, se puede asimilar a un docente que explica el saber en una versión acabada, y un alumno que aplica el conocimiento que le ha sido transmitido. Se considera que alguna intervención tiene la intuición y la experiencia del alumno en el aprendizaje, para tratar de lograr una mejor comprensión de los conceptos y razonamientos matemáticos.

Las señales de cambio son en la concepción de la matemática a enseñar, ligada a una introducción de los objetos de la matemática que utiliza más de una vía. Se hace una presentación clásica, pero acompañada de otra que apela a la intuición y aún a la experiencia. Esto resulta contradictorio con la posterior presentación deductiva de las propiedades, pues un carácter distintivo de lo deductivo es la generalización y el carácter de verdades necesarias y no de hecho a las que se aplica. La intención de usar la intuición como auxiliar, resulta en una confusión respecto del status de los objetos. La manipulación de las figuras mediante la medición efectiva, en algunos apartados (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 58 y 61), se propone como medio para probar que una figura cumple una propiedad, con lo que se enturbia la diferenciación entre los objetos y el espacio geométrico, y los objetos y el espacio físico. Se intenta salvar esta cuestión aclarando que lo que se da en el caso particular del dibujo presentado vale en general, y que esto se puede demostrar. (REPETTO, LINSKENS, FESQUET: 1967, 61)

Aparecen algunas diferencias con los textos anteriores, en relación con el lenguaje utilizado, que incluye los signos y símbolos presentados en la primera página, para la representación simbólica y gráfica de las definiciones conjuntistas y las clasificaciones e inclusiones de clases de figuras. El orden de presentación de los conocimientos es el que permite deducirlos de otros anteriores, y la demostración sigue siendo un medio para presentar las propiedades.

La noción de paralelogramo se presenta luego de otras más generales, y también entre ellos se presentan en segundo término los palelogramos particulares, utilizando para mostrar las relaciones entre las distintas figuras y sus propiedades, la noción conjuntista de relación presentada en la síntesis anterior al primer capítulo.

La demostración sigue siendo el modelo de pensamiento deductivo, y no aparecen otra formas de razonamiento. Tampoco hay referencias a la actividad matemática, ni a la elaboración de conjeturas.

Libro Matemática 2 – Tapia, Tapia y Bibiloni.

Este texto se presenta en un único volumen que alterna capítulos de Artimética y Geometría, y contiene un capítulo inicial de "Conjuntos y relaciones". Los contenidos de geometría están organizados en sólo 4 capítulos, cuyas denominaciones son entres casos figuras, y en el último las nociones de equivalencia y área. En el índice de cada capítulo, se van alternando la presentación de los diversos contenidos enunciados brevemente por un nombre genérico (construcciones, propiedades de las diagonales) y los "ejercicios". (Anexo XXXVIII a XLI).

El estudio de los paralelogramos y sus propiedades se incluye, en el capítulo denominado Cuadriláteros y cuadrángulos. En los tres primeros apartados del capítulo se presentan los cuadriláteros, su clasificación y las propiedades de lados y ángulos. (Anexo XLII a LXII)

En el apartado I se presentan los cuadriláteros como fronteras y los cuadrángulos como regiones interiores y fronteras, y luego como intersección de ángulos o de semiplanos. Sus propiedades sólo se enuncian, así como las condiciones necesarias y suficientes de congruencia. (esta noción se presenta en un capítulo anterior). Los ejercicios presentados luego proponen dibujar ejemplos de figuras, explicar sus diferencias, usar las propiedades métricas para calcular, unir puntos en un gráfico y analizar el dibujo obtenido resolver intersecciones de ángulos determinados por 4 puntos en el plano.

En el apartado II se presenta la clasificación de los cuadriláteros, ilustrando las propiedades mediante dibujos con varillas articuladas sobre las que se proponen movimientos, y el paralelogramo aparece como un trapecio particular. Del mismo modo, se van presentando los cuadriláteros particulares y la que se denomina clasificación genética de los cuadriláteros. Se explica que "cuando se demuestra una propiedad para una clase de cuadriláteros es válida para todas las clases incluidas en la primera" (TAPIA: 1975, 249). Los ejercicios de este apartado, proponen por ejemplo, representar en diagramas de Venn tres conjuntos, realizar operaciones y luego definir los resultados por comprensión y analizar qué tipo de relación es la de inclusión entre diferentes conjuntos de cuadriláteros.

En el apartado III, se dice explícitamente que "las propiedades de los lados y ángulos, se presentan por verificación y demostración". Se propone explícitamente la intención de que el alumno demuestre, explicando un recurso general para demostrar: "encontrar triángulos y segmentos congruentes", y una metodología: en función de los datos y las incógnitas, "determinar qué triángulos conviene comparar".

> *"Te mostraremos algunas demostraciones como modelo y te proponemos otras como ejercicio. El propósito no es memorizarlas, sino saber encontrar el camino para lograrla".* (TAPIA: 1975, 251)

Antes de la demostración de una propiedad, se propone una verificación con papel recortado y superposición (TAPIA: 1975, 252), la demostración se hace con una hipótesis y dos tesis para dos propiedades diferentes, y las propiedades recíprocas se enuncian y se explica cómo se pueden demostrar. Como ejercicio para esta parte, se pide demostrar una propiedad dada, y se sugiere realizar una construcción auxiliar (trazar una diagonal y compara los triángulos). Los ejercicios que no son demostraciones proponen analizar varias propiedades como condición suficiente para otra, dibujar figuras con ciertas características, analizar una fórmula de perímetro en relación con el cuadrilátero para el cual puede usarse, y realizar cálculos con y sin uso de ecuaciones.

Al compararlo con los textos anteriores, se observa una modificación importante en el lenguaje, tanto en de la notación en general (aparecen los símbolos de pertenencia, inclusión, etc.) como en la específica de la geometría (los puntos con letras minúsculas y las rectas con mayúsculas), y también con un lenguaje gráfico nuevo (los diagramas de Venn) para el que se fijan algunas convenciones. Por otra parte hay una renovación en el vocabulario utilizado para denominar las figuras, por ejemplo se insiste en la justeza de su denominación según que hay que referirse sólo al contorno de la figura (cuadrilátero) o también a la región que este contorno rodea (cuadrángulo).

Los objetos de la geometría que se presentan son puramente formales, pues el punto, la recta y el plano no se definen y los otros objetos son definidos de manera conjuntista a partir de ellos. Sin embargo y a la vez, se hacen derivar de la experiencia, como si se abstrayeran de la realidad. Justamente se trata de mejorar la incomprensión y falta de sentido que genera la formalización presentada recurriendo al material concreto para presentar ejemplos particulares.

No todas las propiedades están demostradas, en algunos casos se explica cómo hacerlo, y cuando corresponde se señala que una propiedad es recíproca de otra. La cuestión de la verificación previa a la demostración, y la enunciación de propiedades como consecuencia de una comprobación (TAPIA: 1975, 252) resulta en una confusión respecto de las formas de validación aceptadas en matemática.

Libro Matemática 2 – Sadovsky, Kass, Panizza, Reyna.

El índice de este libro tiene 15 capítulos en el que se alternan los dedicados a contenidos aritméticos, y geométricos. Incluye una novedad respecto de los textos anteriores, un capítulo dedicado a la demostración, y se señala que el propósito del mismo, es el de "dar a los alumnos la oportunidad de reflexionar sobre los procesos demostrativos". (Anexo LXIII a LXV)

El capítulo dedicado a paralelogramos, intenta "articular una aproximación intuitiva con la introducción al pensamiento formal". (Anexo LXXII a LXXV). La aproximación a la definición de los paralelogramos es la investigación realizada por un grupo de alumnos que discuten su trabajo, y encuentran una regularidad, la de que los puntos medios de los cuadriláteros determinan un cuadrilátero particular, el paralelogramo. En los dibujos realizados, verifican el paralelismo con diferentes cuadriláteros.

La aproximación intuitiva a las propiedades, por ejemplo en el apartado lados y ángulos del paralelogramo, la propiedad de congruencia de los mismos se comprueba con uso de varillas y recortado (SADOVSKY, KASS, PANIZZA, REYNA: 1989, 150), y luego aparece la pregunta acerca de la generalidad de la comprobación realizada, planteando un razonamiento para "cualquier" paralelogramo. Efectuar un razonamiento válido para cualquier figura con las características dadas, es lo que permite afirmar que la propiedad es general. Los razonamientos están planteados en una serie de pasos y en lenguaje simbólico, pero forma parte de un discurso más coloquial. (SADOVSKY, KASS, PANIZZA, REYNA: 1989, 150)

Para algunas demostraciones se sugiere un camino, y explicar las razones por las que se puede usar una cierta propiedad. En el caso de corresponder, se menciona que la propiedad demostrada es recíproca de la anterior.

Con respecto al uso de la demostración en este capítulo, es un instrumento que permite presentar las propiedades, y el paso a lo deductivo, se relaciona claramente con el intento de generalización.

En el capítulo 11, denominado La demostración en matemática, se hace una introducción acerca del uso del razonamiento que parte de ciertas premisas y luego de varios pasos establece conclusiones para un caso fuera de la matemática. Aparece un cuento policial de Conan Doyle adaptado, y luego se analiza el pensamiento de Holmes, estableciendo las conjeturas iniciales, los datos adicionales buscados, y la conclusión. Al plantearlo en la matemática, se hace un paralelo con el cuento, y luego se plantea que un razonamiento inductivo permite descubrir posibles propiedades, se puede sospechar una ley general. Se aclara que luego hay que demostrarlo o encontrar un ejemplo que lo contradiga. (Anexo LXVI a LXIX). Demostrar para todos los elementos de un conjunto infinito, aparece como razonar sobre un elemento genérico.

En el texto, se explicitan los criterios utilizados para la preparación didáctica de dos instrumentos de la actividad matemática, la definición y la demostración. Con respecto a la definición se dice: "un alumno puede utilizar un concepto antes de proponer una definición, esto antes de entender qué significa definir, y esto aún antes de entender para que sirve una definición". Con respecto a la demostración se plantea que: "puede verificar una propiedad en un conjunto finito antes que en un conjunto infinito, puede entender una demostración antes de ser capaz de demostrar, y esto antes de entender qué cosa es una demostración.

Libro de la matemática – 8vo EGB – Guelman, Itzcovich, Pavesi, Rudy.

En este libro los capítulos desarrollan algunos contenidos diferentes de los anteriores. Desaparecen los dedicados a la teoría de conjuntos, y se introducen dos capítulos de Probabilidad y Estadística. Hay 4 capítulos de Aritmética, 5 de Geometría, 1 dedicado a la presentación de la demostración. (Anexo: LXXVI a LXXVIII)

La estructura de cada capítulo del libro está organizada en cuatro partes. En primer lugar se presentan problemas "para resolver con lo que saben", a continuación algunos posibles y diferentes procedimientos para resolverlos, y en tercer lugar la definición o enunciación de los conocimientos utilizados en la resolución y su designación en la ciencia. Finalmente aparecen ejercicios.

En cuanto al capítulo titulado "La demostración", el primer problema plantea decidir si los resultados de unos cálculos son correctos y justificar la decisión. Al plantear dos maneras de resolverlo, una de ellas implica hacer uso de la propiedad distributiva. (Anexo: LXXIX a XC)

En el problema 2, se pide escribir de alguna forma todos los números que cumplen ciertas propiedades. Como se trata de propiedades que cumplen conjuntos infinitos de números, la única forma de escribirlos a todos es buscando una expresión con letras.

En el problema 3, se pide decidir y justificar sobre un conjunto de enunciados si son verdaderos o falsos. El ejemplo está elegido de tal modo que si se empieza a averiguar probando con algunos números, rápidamente se comprueba que el enunciado es falso, con lo que surge la regla de que un contrejemplo basta para probar la falsedad de un enunciado. Por lo tanto, para conjuntos infinitos no se puede garantizar la validez si no se logran escrituras que permitan razonar sobre todos los números.

En el 4, se pide averiguar si se duplica el área de un rectángulo cuando se duplica uno de los lados, con lo que se da un problema geométrico en el marco de la medida.

En el problema 6, se propone determinar la verdad o falsedad de una afirmación sobre un procedimiento para números de una cifra. En este caso, como el conjunto en el que hay que probar es finito y de pocos números, se puede probar con cada uno.

Es interesante relevar que la demostración es retomada en un capítulo posterior, nuevamente en contexto geométrico y en relación con la medida, para presentar el teorema de Pitágoras. Luego de plantear un problema de distancia en un caso particular y recurrir a la propiedad para resolverlo, se desarrolla una posible demostración para el caso de un triángulos isósceles. Esa demostración es anterior a Pitágoras, y así es presentada, tal como se anuncia en el índice. A continuación el autor demuestra la propiedad por deformaciones continuas de los cuadrados construidos sobre los lados, para un triángulo cualquiera (no isósceles)con lo que se amplía el campo de aplicación de la propiedad.

En la reflexión posterior, también se busca ampliar el campo de aplicación de la propiedad pero en este caso en el marco numérico, pues se pregunta cómo funcionará para el caso en que el lado y la diagonal del triángulo sean números irracionales.

Retomando los interrogantes planteados al inicio del capítulo, es posible reflexionar sobre lo analizado hasta aquí siguiendo la evolución de los textos a lo largo del tiempo. Entre los hallazgos mas destacables sobre las problemáticas planteadas se señalan los siguientes:

- *Sobre las decisiones tomadas en la organización del texto y la demostración en él:* En los tres primeros libros, la demostración no aparece tratada como objeto de enseñanza y en los dos últimos libros, sí. Se puede advertir una participación creciente de los autores en la reorganización de los contenidos de las unidades del programa al armar el índice, ya que en los tres primeros libros, los índices siguen unidad por unidad, el programa oficial, y en el cuarto, aparecen temas nuevos como por ejemplo la inclusión del capítulo de demostración. En el caso del último libro, la ausencia de distribución de los contenidos de los CBC por año, deja la tarea de distribución, secuenciación y organización de los contenidos como decisiones de los autores.

✓ *Sobre la concepción de matemática a enseñar y el lugar de la demostración:* Se va transitando de una matemática que se muestra como ciencia axiomática, cuyos objetos son ideales, invenciones del hombre (en REPETTO y otros,1952), a otra matemática con una estructura lógico formal en la que los objetos se abstraen de lo real (en TAPIA y otros). De esta segunda concepción se transita a una tercera, en la que la matemática es una actividad de resolución de problemas, y sus objetos son construidos en esta actividad (GUELMAN y otros).

Paralelamente, según cada concepción de matemática la demostración tiene un papel diferente. Si los objetos son ideales, las reglas de la lógica anteceden a la actividad de demostrar, y las demostraciones deberán ser deducidas a partir de las definiciones de los objetos y de esas reglas. Si los objetos son descubiertos, preexisten a la actividad de demostrar, y la demostración es un medio de suplir la insuficiencia de los medios de observación o de los instrumentos. Si los objetos matemáticos son construidos, existe una simultaneidad entre la construcción de una racionalidad matemática y la actividad de demostrar.

Por otra parte, mientras que en los tres primeros libros se presenta la demostración como modelo del pensamiento matemático, en los dos últimos es presentada con claridad como instrumento de validación.

Se identifica una evolución en el papel del alumno como sujeto de aprendizaje en lo relativo a lo que se concibe que tiene que hacer, a lo largo de todos los libros. En REPETTO de 1952, el alumno sólo contempla, memoriza y copia las demostraciones, en REPETTO de 1967 aplica sus resultados, y en TAPIA es instado a utilizar el razonamiento deductivo como una serie de deducciones pero sin demostrar. La matemática deductivista que se muestra en estos tres casos podría ser para los alumnos, inhibidora de sus comportamientos heurísticos. A partir de GUELMAN, puede observarse que la actividad matemática del alumno es entendida como un proceso de resolución de problemas, y ese proceso puede o no incluir momentos, en los que demuestre.

✓ *Sobre la noción de paralelogramo y las propiedades demostradas*

Ante la ausencia de la demostración como objeto de enseñanza, el análisis sobre la presentación de la noción de paralelogramo, podría sintetizarse plateando que ha sido hasta Sadovsky inclusive, un contenido a tratar, pero, luego desaparece en los textos de segundo año para pasar a los textos de sexto grado.

En todos los casos, el conjunto de figuras y propiedades que se tratan son los mismos, aunque varían la forma de definirlas y de presentar las propiedades. De la definición clásica por sus propiedades, se pasa a la "conjuntista". Las propiedades dejan de ser todas demostradas, también sus recíprocas cuando existen, y pasan a ser sólo algunas demostradas y otras enunciadas.

En los tres primeros textos, la noción es tratada en forma "descontextualizada", en su carácter de objeto, y no como instrumento de resolución. Los ejercicios en los dos libros de Repetto son de cálculo o de construcción. En Tapia se agregan los de clasificación. En el SADOVSKY en cambio, además de presentarla fuera de contexto, también se plantean "problemas abiertos" donde hay que tener en cuenta las propiedades de las figuras para resolverlos.

Un caso interesante de analizar, es el de las construcciones geométricas, que evolucionan en su tratamiento a lo largo de los libros, pasando de ser procedimientos a repetir en ambos REPETTO, a constituirse en el de SADOVSKY en una fuente de problemas.

✓ *Sobre la preparación didáctica de la demostración.*

Se han observado algunas coincidencias en dos textos, los de sadovsky y guelman, en los que la demostración es un contenido a enseñar. El tratamiento que se da a las figuras geométricas no es el de dibujo, sino el de objetos ideales. El razonamiento deductivo en matemática está asociado a la necesidad de pensar en propiedades que valgan para todos los objetos, sean números o figuras, es decir a la idea de generalización. Cuando se propone arribar a conjeturas por vía inductiva, es decir mediante el análisis de casos particulares, se aclara que si no se demuestra, es propiedad no es válida.

También se observan diferencias en cuanto al modo de entrada a la demostración. Mientras que en SADOVSKY, se plantea la realización de verificaciones de propiedades antes que las demostraciones, en GUELMAN se proponen preguntas cuya respuesta el alumno no conoce y que lo harán entrar en un proceso de resolución y validación. En Sadovsky, se introduce en el ámbito de analizar propiedades de los números, y en el segundo se amplia a analizar también en el marco geométrico.

Otra diferencia entre ambos textos, es que la entrada al razonamiento deductivo en matemática se hace en el primero de estos libros por comparación y diferenciación del uso del razonamiento deductivo fuera de ella, mientras que en el de GUELMAN, se plantea un conjunto de problemas a resolver, y en cada uno de ellos es necesaria alguna "regla" diferente para llegar a la respuesta. Así se va pasando por el "contrajemplo", el probar uno a uno para conjuntos con muy pocos elementos, buscar una fórmula para conjuntos infinitos.

✓ *Sobre las prácticas docentes inducidas y la representación del aprendizaje del alumno en relación con el razonamiento y la demostración*

En la práctica de enseñanza que inducen los dos libros de REPETTO, no se propone el aprendizaje de la demostración propiamente dicho, y no se realizan actividades con el propósito de enseñar a demostrar. El profesor tendría que mostrar las demostraciones a los alumnos, escribirlas en el pizarrón, explicar dónde y cómo se deben escribir H/, T/ y las líneas del razonamiento hasta llegar a la conclusión. La demostración consiste en pasar de una a otra mediante un razonamiento deductivo. Pero, demuestra sólo para exponer en forma racional, organizada deductivamente. La demostración muestra un "producto", no una actividad.

Si el alumno fuera invitado a demostrar, no sabría cómo hacerlo. No puede imaginar que para demostrar es necesario pensar, y aunque le hayan dado las reglas no comprenderá el sentido del juego que se les propone.

En la práctica de enseñanza inducida por TAPIA, el profesor tendría que realizar experiencias con materiales manipulativos para que el alumno descubra las propiedades. Sólo en el caso de que alguna de ellas no sea evidente para el alumno, tendrá que demostrar. Aunque reconoce la potencia del razonamiento deductivo, no planteará al alumno demostrar, sino usar las propiedades para establecer relaciones.

Si al alumno se le propusiera demostrar, trataría de buscar los pasos del encadenamiento deductivo, sin preguntarse si la propiedad es o no verdadera.

En la práctica de enseñanza inducida por GUELMAN, el profesor tendría que plantear problemas, y los alumnos deberán resolverlos, luego discutirá la solución con ellos analizando las reglas utilizadas para asegurarse de que "todos los objetos" cumplan o no cumplan la propiedad en cuestión.

Focalizando en la enseñanza de la demostración y la formación del pensamiento deductivo, se puede concluir que:

En los tres primeros textos (REPETTO, REPETTO, TAPIA), la demostración no aparece como contenido a enseñar y se muestra como "pasos a seguir" según las reglas de la lógica deductiva, algoritmizada y sin asociarla a un debate, sin que se reconozcan otras formas de razonamiento que llevan a formular conjeturas (fase exploratoria).

En los dos últimos textos (SADOVSKY, GUELMAN), la demostración aparece como contenido a enseñar y se muestra como un instrumento ligado a la validación - evaluación del resultado obtenido para sí mismo y para comunicar a los otros. (quien demuestra ya ha adquirido cierta convicción, cierta certeza respecto de que el resultado es válido). En las propuestas de enseñanza, el instrumento tiene tal fuerza que permite crear nuevos objetos

6. EPILOGO

Este estudio e investigación se refiere *a la enseñanza de la matemática en la escuela media, en su primer ciclo,* y particularmente sobre la enseñanza de *la demostración*, entre los años 1950 y 2000 en Argentina

Justamente cuando la enseñanza media procura ser universal, y de calidad para todos los estudiantes. Tal preocupación involucra el quehacer de todas las instancias del sistema educativo y de cada uno de sus actores. Universalizar la enseñanza media implica asimismo como se afirmara en la introducción de este texto, darse la oportunidad de pensar *cómo enseñar a pensar*, reflexionar sobre las estrategias más significativas para potenciar el *aprender a aprender* a lo *largo de toda la vida.*

El abrir un amplio abanico de posibilidades al enseñar la utilización de diversos conceptos y herramientas de las disciplinas, así como, el reconocimiento de *su potencia heurística es sin duda una de las deudas más desafiantes que enfrentan las didácticas* a la hora de pensar el conocimiento que tienen que adquirir los estudiantes para ser usado fuera de la escuela en el inicio del tercer milenio.

A lo largo de este trabajo puede afirmarse que se ha arribado a los objetivos que se planteara, uno de ellos, el que se planteaba *ocuparse de indagar sobre cómo se utilizó en la enseñanza de la matemática la demostración como herramienta de formación del pensamiento, en caso de que se lo hubiera hecho.*

El otro objetivo, el que se inscribía dentro de las actuales preocupaciones de *aportar al desarrollo y adecuación de la enseñanza de nivel medio, en su primer ciclo, a una significativa formación del pensamiento de los jóvenes que asisten y acceden a este nivel,* hoy obligatorio en la mayoría de los países latinoamericanos.

Para iniciar una recuperación de lo analizado en esta investigación a lo largo de sus capítulos, pueden destacarse las conclusiones que se explicitan a continuación:

Se ha visto en ***capítulo dos***, que cuando en el siglo –V, los griegos detectan el problema de los irracionales, aparece la necesidad de la deducción para probar la verdad, así como se impone la transformación de los objetos matemáticos en objetos ideales.

Históricamente, la demostración griega evoluciona tanto en sus formas, lenguajes, como en los objetos a los que se refiere, y según a los períodos que se consideren la actividad de demostrar estará más relacionada con la sistematización de lo conocido. En otros períodos en que la expansión de la ciencia prevalece ante los nuevos problemas se generan nuevos conceptos e instrumentos para abordarlos, y la propia actividad de demostrar acrecienta el aporte a esta expansión.

En tanto se da este doble circuito del pensamiento: uno, comenzar *del resultado conjeturado* buscando las *relaciones* que conducen a él, desde el punto de partida; y, dos, deducir paso a paso desde las premisas conocidas para llegar al resultado con un procedimiento válido para la comunidad científica.

También se han visto las *permanencias* que en el transcurso de la historia se mantuvieron como propias de la demostración y que tienen que ser conservadas en la enseñanza para que la transposición didáctica sea "fiel" al propio objeto del saber:

- ✓ el carácter a priori de sus enunciados
- ✓ el carácter de necesidad de las conclusiones por el uso de reglas establecidas, y
- ✓ el carácter universal y abstracto de los objetos.

De los análisis desarrollados en el ***capítulo tres*** en el que culmina la primera parte de este estudio, pueden destacarse las siguientes conclusiones:

Para enseñar matemática es indispensable, sin duda, incluir *la demostración* como contenido de la enseñanza, ya que sin ella no existiría en la matemática escolar uno de los rasgos esenciales de la racionalidad matemática: el uso del razonamiento deductivo. Es más, es la actividad de demostrar la que permite a los alumnos construir esa racionalidad.

Esta actividad, debiera aparecer en la matemática escolar como una forma de prueba entre otras, para lo que es necesario instalar en el aula una forma de actividad matemática, en la que los conocimientos vivan como respuestas a problemas, y el debate sobre lo producido sea una forma de interacción entre los integrantes de la clase. De tal modo, las reglas que norman el debate podrán evolucionar hacia aquellas que son válidas en la comunidad científica.

Por otra parte, la propia actividad de demostrar tendría que aparecer, en el curriculum, como contenido de enseñanza, para que todo alumno pueda acceder a esta práctica matemática.

En la ***síntesis del capítulo cuatro***, pueden destacarse las conclusiones siguientes:

En el marco de la evolución de los documentos regulatorios de la enseñanza, y en relación con las orientaciones que brindaron para las transformaciones los libros de los matemáticos destacados, es posible identificar *cambios* que se dieron en la enseñanza de la demostración y la formación del pensamiento.

Que la enseñanza de la Matemática tiene un papel en la formación del pensamiento de los alumnos, y que ese papel está centralmente dado porque brinda la posibilidad de formación en el uso del razonamiento deductivo, uno de los elementos que constituyen su racionalidad, es una cuestión que se constata en los escritos de los matemáticos de todos los períodos. Sin embargo, tal intención formativa no está expresada en los documentos de los dos primeros períodos (1950 a 1965). La razón fundamental, pareciera relacionarse con la idea de que la *sola exposición del conocimiento organizado deductivamente*, habría de generar tal formación.

En el tercer período (1965-1994) comienza a ser incluida la preocupación de enseñar a razonar que se observan en las orientaciones didácticas, porque comienza a entenderse al alumno deberá tener un rol activo en el aprendizaje, el que debe resolver problemas. Se supone que aprenderá a razonar deductivamente con la práctica continua de resoluciones, para las cuales sólo se admite como válido el uso del razonamiento deductivo. Otras formas de razonamiento se admiten fuera del proceso de resolución de problemas.

En el cuarto período (1994-2000) en los documentos regulatorios, la formación del pensamiento es un propósito de la enseñanza, y los tipos de razonamiento inductivo y deductivo incluidos en las orientaciones didácticas como distintas formas de llegar al conocimiento, es decir como parte de lo heurístico en la resolución de problemas.

Se observan cambios en el tiempo en la enseñanza de la demostración. Comienza siendo considerada en los dos primeros períodos mencionados más arriba, y aún en el tercero, es decir desde 1950 a 1994), el método de la matemática, asociada a la producción de conocimientos y confundida con la totalidad del proceso de resolución de problemas. En el último período (1994-2000) se constituye como uno de los instrumentos de prueba usado en el proceso de resolución, el que se atiene a las reglas lógicas y por ello garantiza la validez en la comunidad del resultado producido.

En los dos primeros períodos mencionados, el alumno debe copiar o comprender demostraciones hechas por otros, en el tercero, podrá demostrar más adelante pero no en el primer ciclo de la escuela media. ¿Cómo se articula esto con el propósito de formar en el razonamiento deductivo?, sólo resolverá deductivamente problemas que permitan otras formas de validación, los de contexto extramatemático.

En el último período que abarca de 1995 a 2000, la resolución se concibe como un proceso que incluye diferentes momentos de validación en su transcurso, y que también incluye momentos en los que el pensamiento funciona más con una intención de investigar caminos que de controlar lo que se ha hecho hasta allí, más en la exploración de posibilidades que en la búsqueda de la certeza.

Sin embargo, no se plantea aún con claridad que la demostración es una forma de validación más exigente que otras pruebas pues implica la constitución de una racionalidad en la que no sólo interesa la forma de abordar los objetos, sino el status de los objetos mismos y el lenguaje utilizado para su tratamiento.

Del capítulo cinco pueden retomarse las siguientes conclusiones:

Puede afirmarse que, en los tres primeros libros estudiados (REPETTO, REPETTO, TAPIA) la demostración no aparece tratada como objeto de enseñanza. En los dos últimos libros del estudio (SADOVSKY, GUELMAN) puede verificarse que si se la incluye como tal.

Asimismo, según cada concepción de matemática en vigencia, se modifica el papel de la demostración. De las demostraciones deducidas a partir de las definiciones de los objetos ideales y las reglas lógicas, pasando la demostración como forma de suplir la insuficiencia de los medios de observación para objetos descubiertos y abstraídos de la realidad, hasta la simultaneidad entre la construcción de una racionalidad matemática y la actividad de demostrar.

En los tres primeros libros (REPETTO; REPETTO, TAPIA) se presenta la demostración como modelo del pensamiento matemático, en los dos últimos (SADOVSKY, GUELMAN) es presentada con claridad como instrumento de validación.

De una matemática deductivista que podría ser para los alumnos, inhibidora de sus comportamientos heurísticos, se pasa a una actividad matemática para el alumno entendida como un proceso de resolución de problemas.

Las demostraciones en los capítulos de paralelogramos de los tres primeros libros (REPETTO; REPETTO, TAPIA, aparecen como un producto terminado y formalmente adecuado de la actividad matemática. En SADOVSKY, hay un intento de mostrar el proceso de producción y las reglas a las que se ajusta, intento más logrado en GUELMAN.

En los textos donde la demostración es un contenido a enseñar (SADOVSKY, GUELMAN), aparece en relación con las propiedades de los números y en el marco geométrico, y en el marco de la racionalidad matemática.

A modo de aportes

Para concluir este trabajo y de acuerdo a sus objetivos pueden esbozarse orientaciones para *repensar en procesos de mejora* dirigidos a los diferentes actores del sistema educativo

Que la enseñanza de la demostración tiene un papel crucial para que los adolescentes tengan posibilidad de acceder a la construcción de una racionalidad matemática, es porque la misma es el instrumento de formación del razonamiento deductivo. La demostración debe ser incluida en la enseñanza de la matemática. Por lo tanto, es una manera en que esta enseñanza puede contribuir mejor a la formación del pensamiento de los jóvenes, son afirmaciones de esta tesis.

Sin embargo, se ha llegado a explicar también que si bien el propósito formativo de la enseñanza de la matemática se ha expresado entre los matemáticos desde 1950, sólo hace pocos años esto se ha concretado en los objetivos de enseñanza y más recientemente, en 1994, *la demostración se incluye como contenido de la misma en el primer ciclo de la enseñanza media.*

Las razones de esta demora pueden rastrearse en la concepción de matemática a enseñar y de cómo los alumnos se apropian de los conocimientos matemáticos en los períodos estudiados, y también en la dificultad para transponer la demostración a la enseñanza por la ausencia hasta hace pocos años de estudios didácticos en los que se lo considere como un una problemática de enseñanza con un componente específicamente matemático.

Por otra parte, en tiempos en los que se plantea la inclusión de todos los adolescentes en la escuela, *la problemática de la enseñanza de la demostración como instrumento de formación del pensamiento es decisiva.* Hay muchos educadores que llegan a sostener que es suficiente para un ciudadano usar la matemática básica, que no necesariamente requiere aprender a demostrar. Sin embargo, si se quiere pasar de lo declarativo a los hechos en cuanto al aporte a la formación del pensamiento de la enseñanza de la matemática, hay que plantear para los alumnos una *construcción progresiva de la racionalidad propia* de esta disciplina desde el inicio de la escolaridad, como un proceso en el cual, si bien cada joven avanzará según sus posibilidades, la escuela debe garantizar como recorrido posible.

Sobre la formación del pensamiento de los adolescentes

Las implicancias de las afirmaciones anteriores, al pensar en la formación del pensamiento de los jóvenes, se centran primero en la clase de matemática. ¿Cómo plantear en el ámbito escolar el "juego del matemático", con alumnos del tercer ciclo cuyos conocimientos y formas de abordaje son diferentes de las de los matemáticos? Involucrándolos en un contrato de comunidad clase resolviendo problemas, reflexionando sobre lo hecho, lo que dará lugar a que evolucionen tanto los conocimientos como las formas de abordaje

Y más específicamente ¿Cuál es el modo de desencadenar en todos los alumnos un proceso de prueba?, y ¿cómo hacer aparecer en el transcurso del proceso la necesidad de cambiar el tipo de argumentos, cuestionarse las reglas del debate, modificar su conceptualización de los objetos? En principio, pareciera que hay que proveerles de un entorno con un problema adecuado, con el que los alumnos puedan interactuar en forma privada y/ o en un debate con sus pares.

Algunos investigadores están trabajando en esta línea, con muchos interrogantes como los siguientes a la vista: ¿se pueden construir las reglas del debate o sólo se puede lograr que aparezca en la clase su necesidad?, el paso a lo deductivo ¿implica continuidad o ruptura con la racionalidad anterior?, si algunos alumnos entran y otros no en el juego deductivo, para estos últimos, ¿cómo se puede promover que "entren"? ¿qué factores inciden en ese "encender el motor" que hace buscar respuestas?

Se ha planteado *la necesidad de involucrar a los alumnos en prácticas de resolución de problemas, en relación con el aprendizaje de la demostración.* Pero hasta aquí no se ha puesto el acento en el valor de esta formación por sus implicancias en el marco de generar en los jóvenes competencias que les permitirán manejarse con autonomía en su vida como ciudadano.

El involucramiento en la resolución de problemas, ubica a quien la emprende en una exigencia de búsqueda, de exploración que va *generando confianza en la propia capacidad de enfrentarse con situaciones desconocidas y encontrar respuestas acudiendo a los propios recursos.* Genera la *capacidad de internarse en un pensamiento exploratorio,* *heurístico*, que es potente porque se anima a transitar y va evaluando alternativas, caminos posibles, para ir obteniendo resultados con buenas probabilidades de ser razonables.

Un pensador involucrado en la resolución de problemas, a diferencia de un pensador algorítmico, que garantiza la consecución de una buena respuesta, pero no busca alternativas y tiene estrategias menos flexibles y adaptables a nuevos contextos y situaciones, *abre frente al problema un razonable abanico de alternativas*, "hace una buena apuesta" las explora y las valida. *Es el tipo de pensamiento que necesita sin duda un joven del tercer milenio.*

Sobre la vida en el aula

Pensar hoy día en la vida de la matemática en el aula, en el tipo de actividad que allí se instala, no puede hacerse sin concebirla como parte de la escuela. *Si para aprender a demostrar es necesario involucrarse en un proceso de prueba*, éste sólo puede darse cuando en la clase la actividad matemática esencial es la de resolución de problemas, entendida *como forma de resolver y reflexionar, hacer, y saber cómo y por qué se hizo, explicarlo mostrando caminos y explicando razones, interesándose por la validez de lo realizado.*

La evaluación de los aprendizajes, por su fuerte incidencia en el "contrato didáctico", y concebida como parte del proceso de enseñanza, debe modificarse desde sus usos actuales para acompañar el criterio de que se muestra lo aprendido cuando se pueden utilizar los saberes y saber hacer en situaciones que comporten un desafío. *Las evaluaciones tendrían que incluir situaciones que sean también de resolución de problemas, de producción de conocimientos en algún sentido, de resignificación de lo conocido en situaciones nuevas.*

Pero por otra parte, si la construcción de la racionalidad es un proceso, que se da a lo largo de varios años, es necesario generar *acuerdos institucionales respecto de los criterios a utilizar en las prácticas docentes que deben ser comunes a todo el equipo*. Por ejemplo, los criterios de elaboración y de valoración de la evaluación, de seguimiento de los aprendizajes y dificultades de los alumnos, de planificación y secuenciación de los contenidos y actividades de enseñanza, de cómo intervenir en la dirección del estudio de cada estudiante también fuera de la clase y en particular para los casos en que sea necesario una nueva mediación del saber.

En las escuelas hoy, los docentes desarrollan entre los roles más importantes, el de desarrollar el curriculum y el de evaluarlo. *El desarrollo del curriculum necesita de un proceso de jerarquización de contenidos, de discernir lo esencial a ser enseñado para articularlo en torno a ejes o problemáticas significativas para los alumnos y relevantes desde el punto de vista disciplinar.*[5] La evaluación implica tanto la realización de un diagnóstico de los saberes disponibles de los alumnos, como de sus necesidades, patrones culturales, e intereses, siendo el docente profesional quien lleve a cabo esta transposición.

Ambas tareas requieren de una mayor profesionalización, que necesita de tiempos destinados a la reflexión sobre las prácticas, el estudio de nuevas propuestas, la discusión que abarquen nuevos horizontes.

Sobre los textos

El paso a lo apodíctico, el modo en que los estudiantes cambian de punto de vista respecto de los objetos matemáticos (en particular de las figuras para el caso de la geometría), la evolución de los tipos de pruebas que dan de pruebas pragmáticas a intelectuales, el diseño de situaciones de enseñanza que permiten la construcción de unas reglas de debate o al menos la necesidad de conocerlas para validar de acuerdo a ellas, son cuestiones en estudio en la comunidad didáctica.

No obstante, el planteo de problemas para resolver como actividades para los alumnos, asegura el uso de diferentes formas de razonamiento y de diferentes tipos de prueba si tienen las características siguientes. La actividad de demostrar, exige plantear problemas donde a la vez los objetos no sean tomados en forma empírica proponiendo verificaciones o utilizándolos ostensivamente, donde se cuestione este uso y las pruebas pragmáticas, y donde el razonamiento deductivo esté asociado a la necesidad de generalización.

Las situaciones a plantear, que generan una necesidad de entrar en un proceso de prueba, pareciera que están más ligadas a aquellas en las que el alumno debe responder preguntas cuya respuesta no conoce, porque entonces podrá entrar en un proceso de resolución y validación.

Convendría también, proponer las situaciones de modo que resulten insuficientes los medios disponibles para validar, si se busca pasar de pruebas empíricas a intelectuales, cuestionando las reglas de validación que los alumnos usan de plantear. Se trata de que la situación apunte a construir alguna de las reglas del debate, como por ejemplo que muchos casos particulares no alcanzan para probar que una propiedad es verdadera si no se puede probar con todos, pero que un ejemplo alcanza para probar que es falsa.

Sobre la formación docente

En principio, es posible plantearse en la formación docente preguntas ligadas a la modificación de sus concepciones, y otras en relación con cómo transferirán lo aprendido a las prácticas. ¿Cómo hacer que los docentes conciban la demostración como un proceso de prueba en el marco de la resolución de problemas, cómo hacer que conciban ese proceso como integrado por diferentes secuencias, de investigación, de formulación, de control de lo realizado para tomar una decisión, y que es en ese proceso donde se da la dialéctica investigación – validación, que implica también la formulación y comprende la solución? ¿Cómo promover la elaboración de concepciones en las que se considere que la racionalidad matemática es una construcción individual de cada estudiante? ¿Cómo llevar a las aulas un funcionamiento de la matemática con este enfoque, dados los condicionamientos del sistema de enseñanza?

Con respecto a cómo generar la concepción planteada más arriba sobre los futuros docentes, en un enfoque coherente con el de este estudio, se puede plantearse lo siguiente. Si las concepciones sobre la matemática y sus objetos se adquieren ligadas a las prácticas matemáticas en las que cada sujeto tienen la oportunidad de participar, la formación docente de los profesores debiera incluir prácticas de demostración que generen la concepción mencionada. Del mismo modo, para que *la exigencia de pruebas encuentre un lugar en las prácticas matemáticas escolares en la escuela media, el profesor deberá*

- *aceptar que los criterios de prueba pueden evolucionar con la escolaridad, y aceptar como pruebas para el análisis didáctico otras además de las demostraciones en sentido estricto.*

Con respecto a la transferencia de lo aprendido a las prácticas, no es posible seguir pensando que la modificación de las culturas institucionales, y de las prácticas docentes es una tarea que pueda realizarse en forma individual por uno o dos docentes entusiasmados. La modificación de las prácticas requiere de deliberaciones y discusiones en equipo en los que se elaboren proyectos con objetivos, tareas y tiempos que muestren claridad y sentido de metas pedagógicas, de formación y en tanto así sociales.

Si esta posibilidad se da, será necesario trabajar en equipo, para analizar los textos que faciliten el trabajo en el marco de la resolución de problemas, seleccionar y secuenciar los contenidos ligados a la enseñanza de la demostración en función de los conocimientos de los alumnos, y sus heterogéneas características.

Los cambios curriculares recientes y en los estilos de gestión suponen mayor autonomía de las escuelas lo que requiere asimismo, nuevas competencias en los docentes, que implican la reconversión de los que concluyeron su formación inicial y repensar la de los aún no formados.

Entre otros cambios, las formas de enseñar en los profesorados debe modificarse y también las formas de pensar la enseñanza en las escuelas medias. Las nuevas competencias que deben adquirir los docentes en formación, no pueden enseñarse con estrategias que sólo pongan el énfasis en lo disciplinar o las basadas sólo en la observación de clases. *Es necesario combinar una posibilidad de práctica de matemática similar a la que deberán utilizar con los alumnos, con una de discusión específica sobre casos*, en las que adquieran nociones de análisis didáctico.

Sobre las orientaciones para la enseñanza

Uno de los más fuertes condicionamientos de la enseñanza sobre el funcionamiento del conocimiento en la clase, es la necesidad de evaluar los aprendizajes. Esto genera, en el caso de la matemática, un efecto denominado de "algoritmización", de descomponer el saber en un paso a paso totalmente determinado, que hace disminuir el nivel de exigencia de la tarea para asegurarle al alumno el éxito. Esto facilita la evaluación según una concepción en la que el aprendizaje se mide por la distancia al saber acabado. Pero este proceso, en el que el alumno sólo debe realizar la secuencia de pasos sin saber el para qué los hace, genera dos dificultades que se explican para el caso de la demostración. Si demostrar es seguir un estereotipo centrado en el cálculo lógico a partir de un conjunto de enunciados y por lo tanto es una actividad independizada del proceso de validación, la tarea pierde para el alumno su sentido original.

Por otra parte, aunque la intención es asegurar al alumno el éxito, la falta de sentido genera desinterés en la tarea y por lo tanto, no se activa el motor de la actividad de demostrar, conocer no sólo cómo es sino por qué es así, no interesa ir a la caza de las propiedades. El paso a paso entendido como cálculo lógico se agota.

La modificación de las formas de evaluación en el marco de los nuevos enfoques para la enseñanza que se desprenden de la transformación curricular, es una de las tareas inconclusas que debieran ser pensadas.

La transformación de 1994 curricular ha iniciado sólo la tarea de transposición de los contenidos para su enseñanza en el sistema. Esto exige en un futuro muy próximo, lograr un avance mayor en la transposición pedagógica y didáctica entre los conocimientos, habilidades, actitudes y valores identificados y seleccionados y la organización cotidiana de las oportunidades y caminos para que los jóvenes puedan acceder a ellos y hacerlos propios: tiempos, secuencias, formas de organización del trabajo, estrategias de enseñanza, formas de evaluación.

Si no se avanza en esta tarea, el aumento de obligatoriedad de la enseñanza que debiera permitir que todos los jóvenes accedieran a conocimientos y herramientas hasta hace poco reservados a una minoría, pueden no llegar a cumplir y sólo terminarían aprendiendo los mismos contenidos anteriores diluidos en más años de escolaridad. En particular en la escuela media, las nuevas propuestas curriculares se enfrentan con un escenario complejo tanto desde el punto de vista socioeconómico como cultural, porque la educación ya no garantiza la movilidad social, y porque la cultura de los jóvenes que se incorporan responde a patrones diferentes que los de los profesores y muchas veces desconocidos para ellos.

Para que se produzcan modificaciones en el proceso y en los resultados de aprendizaje es necesario otorgar mayor prioridad a las dimensiones pedagógica y didáctica, pero con acuerdos institucionales coherentes y significativos para todos. Es necesario disponer de respuestas pedagógicas apropiadas para trabajar en contextos sociales y culturales tan complejos como los actuales, y esas respuestas deben ser construidas en los ámbitos específicos. Se carece aún de una *pedagogía de la diversidad* que resuelva problemas de aprendizaje de poblaciones culturalmente heterogénea y en condiciones de pobreza.

7. BIBLIOGRAFÍA

7.1 MATEMÁTICA, HISTORIA DE LA MATEMÁTICA, EPISTEMOLOGíA, LÓGICA

ACTES DU 7EME COLLOQUE INTER-IREM ÉPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. **La démonstration mathématique dans l 'historie,** Besancon – Mayo, 1989.

DEL BUSTO, EDUARDO H.: **La inducción matemática,** Publicación del Bachillerato de la Escuela Superior de Bellas Artes de la UNLP; Departamento de Físico – Matemática, La Plata, 1986.

EGGERS LAN, CONRADO: **El nacimiento de la matemática en Grecia,** Buenos Aires, Eudeba,1995.

GARCÍA, ROLANDO: **El conocimiento en construcción**. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos, Barcelona, Gedisa, 2000:

KHUN, T.: **La estructura de las revoluciones científicas**, Fondo de Cultura Económica, México, 1995.

KLINE, MORRIS: La génesis de las verdades matemáticas, cap. 1 en **Matemáticas. La pérdida de la certidumbre,** Madrid, Siglo XXI, 1985.

LAUDAN, LARRY: **El progreso y sus problemas**. Hacia una teoría del conocimiento científico, Madrid, Encuentro ediciones, 1986.

LAKATOS, IRME: **La metodología de los programas de investigación científica,** Madrid, Alianza Universidad, 1998.

LE FEVRE, JAQUES: **La démonstration mathématique dans l 'historie**. Francia, Bulletin AMQ, Octobre 1991.

PUYAU, H Y ROETTI, J.: **Elementos de lógica matemática**, Buenos Aires, Eudeba Manuales, 1976.

ROMERO Y PUCCIARELLI: **Lógica. Edición escolar**. 14ª edición. Buenos Aires, Espasa Calpe, 1952.

SINGH, SIMON: **El último teorema de Fermat**. 1ª edición en castellano. 1ª edición en inglés: 1997. Buenos Aires, Grupo Editorial Norma, 1999.

7.2. ENSEÑANZA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ARSAC, GILBERT: *L' évolution d' une théorie en didactique: l' exemple de la transposition didactique,* en **RDM** Vol.12/1, Francia, La pensée sauvage éditions, 1992.

ARTIGUE, MICHELE: *Epistemología y didáctica* en **RDM** Vol. 8.1, Francia, La pensée sauvage éditions, 1987.

BRASLAVSKY, CECILIA, **La educación secundaria. ¿Cambio o inmutabilidad?**, Buenos Aires, Santillana, 2001.

BROUSSEAU, GUY: *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, FAMAF., Serie B, **Trabajos de matemática** nro. 19, 1987, versión en español 1993.

CHEVALLARD, YVES: **La Transposición Didáctica. Del saber académico al saber enseñado,** Traducción 1991, Buenos Aires, Aique, 1989.

CHEVALLARD, YVES: *Concepts fondamentaux de la didactique: pespectives apportées par une approche anthropologique.* **RDM** Vol. 12/1. Francia, La pensée sauvage éditions, 1992.

CHEVALLARD, YVES; GASCÓN, JOSEPH; BOSCH, MARIANA: **Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje**. Universitat de Barcelona, Horsori, 1997.

CONNE, FRANÇOIS: *Savoir et connaisance dans la perspective de la transposition didactique*. **RDM** Vol. 12/2.3, Francia, La pensée sauvage éditions, 1992.

CORIAT, MOISES: *Cultura, educación y currículo*, cap 3 en **Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria**, Colección educación matemática en secundaria, Madrid, Síntesis, 1997.

DOUADY, REGIN: *Relación enseñanza aprendizaje. Dialéctica herramienta objeto y juego de marcos*. **RDM** Vol. 12/2.3, Francia, La pensée sauvage éditions, 1992.

MARGOLINAS, CLAIRE : **De l' importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Francia, La pensée sauvage éditions, 1993.

NICKERSON, R., PERKINS, D., SMITH, E.. **Enseñar a pensar**. Aspectos de la aptitud intelectual, Temas de educación, Barcelona, Paidós, 1987.

PORTUGAIS, JEAN: **Didactiques des mathématiques et formation des enseignants**. Canadá, Peter Lang, 1995.

SANTALÓ, LUIS: **La matemática en la escuela secundaria**. EUDEBA, 1966.

TENTI FANFANI, E.: *La educación de los adolescentes: entre el espontaneismo y la responsabilidad escolar*, Conferencia en el **Trayecto de Formación de Especialistas Provinciales en Gestión Institucional Educativa**, PNGI, ME, Argentina, 2001.

TORANZOS, FAUSTO: **Enseñanza de la Matemática**. Kapelusz, 1959.

7.3. ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA: DEMOSTRACION

ARSAC, GILBERT: *L' origin de la démonstration: essai d' épistémologie didactique*, en **RDM** 8/3, Francia, La pensée sauvage éditions, 1987.

ARSAC, GILBERT: *Les recherches actuelles sur l 'apprentissage de la démonstration et les phénoménes de validation en France.*, en **RDM** Vol. 9/3, p. 247-280, Francia, La pensée sauvage éditions, 1988.

ARSAC, GILBERT: *Un cadre d'etude du raisonnement mathématique*, en **Séminaire de Didactique et Technologies Cognitives en mathématiques**, Grenoble, 1996.

BALACHEFF, NICOLAS: *Apprendre la preuve,* prólogo de texto en prensa, Francia, Universidad de Grenoble, 1995.

BALACHEFF, NICOLAS: *Preuve et démonstration en mathematiques au collège*, en **RDM**, Vol. 3/3, Grenoble, La pensée sauvage éditions, 1982.

BALACHEFF, NICOLAS: *Processus de preuve et situations de validation,* en **Educational Studies in Mathematics**. Vol. 18, n°2, Mai 1987, p. 147-176, 1987.

BARBIN, EVELYN: *Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et object de la géométrie*, en **La démonstration mathématique dans l' histoire**, p. 57 a 80. Commission INTER – IREM. Histoire et épistémologie des mathématiques. Francia, Besançon, 1989.

BARBIN, EVELYNE: *¿Qué concepciones epistemológicas de la demostración para qué tipos de aprendizajes?*, en **La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica**, Francia, Topiques éditions, 1996.

BKOUCHE, R..: *Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Goonseth)*, en **La démonstration mathématique dans l' histoire**, p. 115 a 128. Commission INTER – IREM. Histoire et épistémologie des mathématiques, Francia, Besançon, 1989.

DÍAZ MORALES, MARIA C: *La place de la demostration dans l'ESO en Espagne*, en **Repères IREM** Nro. 44, Topiques éditions, Metz, juilliet 2001.

DREYFUS, TOMMY: *La demostración como contenido a lo largo del curriculum,* en **Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.** Barcelona, Graó, 2001.

GODINO, J. Y RECIO, A.: **Significado de la demostración en educación matemática,** Universidad de Granada, Universidad de Córdoba, 1998.

HANNA, GILA: **The ongoing value of proof.** Ontario Institute for Studies in Education, University of Toronto, 1996.

HOUDEBINE, JEAN Y OTROS: **La Démonstration, Écrire des mathématiques au collège et au lycée,** Hachette éducation, Francia.

LEGRAND, MARC: *Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe á une communauté scientifique*, en **RDM** Vol 9/3 (p. 365 - 406), 1988.

MARIOTTI, MARIA ALESSANDRA: **La preuve en mathématiques**, Département de Mathématiques – Université de Pise. , 2001.

NOIRFALISE, ROBERT: Contribution á l 'etude de la démonstration. Etude de régularités dans les modalités de fonctionnement du savoir mathématique dans les divers chapitres de géométrie d 'un manuel de sixiéme, en **RDM** Vol. 13/ 3. (p. 229-256), 1993.

PANIZZA, MABEL: **Generalización y control en álgebra**. (CEFIEC – CBC), Universidad de Buenos Aires, 2000.

RADFORD, LUIS (1993): *La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos,* en **Educación matemática**. Vol. 6 Nro. 3. (p.22-36). Canadá.

7.4. TEXTOS PARA LA ENSEÑANZA MEDIA

ÁLVAREZ, CRISTINA Y OTROS, **Matemática 9. E.G.B. Tercer ciclo.** Noveno año. Buenos Aires, Vicens Vives; 1998.

AMADORI, LILIANA, **Matemática 2. Escuela Media,** 2° año. 2ª edición, Buenos aires, Aique, 1994.

CABRERA, EMANUEL S.; MEDICI, HÉCTOR J., **Matemática para segundo año. Ciclo común al Bachillerato, Magisterio y Escuelas de Comercio.** Buenos aires, Librería del Colegio, 1969.

GUELMAN, ITZCOVICH, PAVESI, RUDY: **El libro de la matemática 8vo**. Buenos Aires, Estrada, 1999.

GUELMAN, ITZCOVICH, PAVESI, RUDY: **El libro de la matemática 9no**. Buenos Aires, Estrada, 1999.

HANFLIG, MIRTA y otros: **Matemática 1. Escuela media. 1er. Año**. Buenos Aires, Aique, 1993.

REPETTO, C.; LINSKENS, M.; FESQUET, H.: **Geometría. Para tercer año del ciclo básico común a bachillerato y magisterio.** 2ª edición. 1ª edición: 1941. Buenos Aires, Kapelusz, 1943.

REPETTO, C.; LINSKENS, M.; FESQUET, H.: **Aritmética. Para segundo año del ciclo básico común a Bachillerato y Magisterio**. 7ª edición. 1ª edición: 1940. Buenos Aires, Kapelusz, 1952.

REPETTO, C.; LINSKENS, M.; FESQUET, H.: **Geometría – segundo curso. Para segundo año de las escuelas de comercio. Para bachillerato y Magisterio**. 4ª edición. 1ª edición: 1940. Buenos Aires, Kapelusz, 1952.

REPETTO, CELINA H.; LINSKENS, MARCELA E.; FESQUET, HILDA B.: **Geometría. Para primer año del ciclo básico y escuelas de comercio**. 19ª edición. 1ª edición en 1940, Buenos Aires, Kapelusz, 1960.

REPETTO, CELINA H.; LINSKENS, MARCELA E.; FESQUET, HILDA B: **Matemática moderna. Geometría 2. Segundo curso del ciclo básico,** 17ª edición, 1ª edición en 1940, Buenos Aires, Kapelusz, 1967.

SADOVSKY, KASS, PANIZZA, REYNA: **Matemática 2,** Buenos Aires, Santillana, 1989.

SANTALÓ, LUIS A.: **Matemática 2. Iniciación a la creatividad. Para segundo año de las escuelas de nivel medio,** Buenos Aires, Kapelusz, 1993.

TAJANI, M.; VALLEJO, M.: **Geometría plana. Para escuelas industriales. Primer año. Ciclo Básico,** 10ª edición, 1ª edición en 1948, Buenos Aires, Cesarini Hnos. editores, 1962.

TAJANI, M.; VALLEJO, M.: **Matemática. Curso moderno para escuelas industriales. Segundo año. Álgebra, Geometría, Trigonometría,** Buenos Aires, Cesarini Hnos. editores, 1972.

TAPIA, C., TAPIA DE BIBILONI, A., VÁZQUEZ DE TAPIA, N.: **Matemática 2. Segundo año del ciclo bási***co*. 1ª edición en 1975, Buenos Aires, Estrada, 1986.

VARELA, L. y FONCUBERTA, J.: **Matemática dinámica – 1. Fichas para ejercitación y evaluación. Para uso exclusivo del profesor.** Buenos Aires, Kapelusz., 1972.

VARSAVSKY, OSCAR: **Álgebra para escuelas secundarias. Tomo 1. Matemática intuitiva,** Buenos Aires, Eudeba, 1964.

7.5. DOCUMENTOS REGULATORIOS

Programa de las asignaturas del primer año. Plan 1956 con los nuevos temas de matemática moderna según circulares 84/65 y 100/66, Ciclo básico, Buenos Aires, Ciordia, 1974.

Programa de las asignaturas del primer año. Nuevo plan según circulares 84/65 y 100/66, Escuelas nacionales de comercio, Buenos Aires, Ciordia, 1980/81.

Programa de las asignaturas del segundo año. Nuevo plan según circulares 84/65 y 100/66, Escuelas nacionales de comercio, Buenos Aires, Ciordia, 1980/81.

Planes y programas de estudio de primero a quinto año. Texto según Res. 1772/65-Circ. 78/66

Planes y programas de estudio del primer año ciclo básico, Texto según Res. 1772/65-Circ. 78/66. Dirección nacional de enseñanza media, Ministerio de Cultura y Educación, Goudelias, 1986/7.

Planes y programas de estudio de Segundo año del Ciclo básico, Dirección general de enseñanza secundaria normal, especial y superior, Ministerio de Educación y justicia, Buenos Aires, 1956.

SUPERINTENDENCIA NACIONAL DE ENSEÑANZA PRIVADA: *Instrucciones para el desarrollo de los programas de matemática del ciclo básico*, en **Boletín informativo del Servicio Nacional de Enseñanza privada,** Noviembre 1965.

CONSEJO NACIONAL DE EDUCACIÓN TÉCNICA, *Sugerencias, para elaborar planificaciones del área de matemática, bibliografía, objetivos, análisis comparativo de programas*. **Boletín del CONET** Nro. 1078, Buenos aires, 1987.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN, **Fuentes para la transformación curricular, Matemática,** Argentina, MCyE, 1996.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN: **Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica**, Argentina, MCyE, 1995.

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN: **Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal**, Argentina, MCyE, 1996.

CONSEJO SUPERIOR DE EDUCACIÓN CATÓLICA: *La enseñanza de la matemática en el ciclo medio*, en **Periódico mensual del CONSUDEC,** agosto de 1965.

JACQUES; AMADEO: *Objetivo de La enseñanza media: preparar para la vida*, en **Periódico mensual del CONSUDEC,** septiembre de 1965.

CONSEJO SUPERIOR DE EDUCACIÓN CATÓLICA: *1ª Conferencia interamericana sobre educación matemática en diciembre de 1961*, en **Periódico mensual del CONSUDEC** de noviembre de 1965.

CONSEJO SUPERIOR DE EDUCACIÓN CATÓLICA: *Normas para el desarrollo de los programas de matemática del ciclo básico*, en **Periódico mensual del CONSUDEC** de enero de 1966.

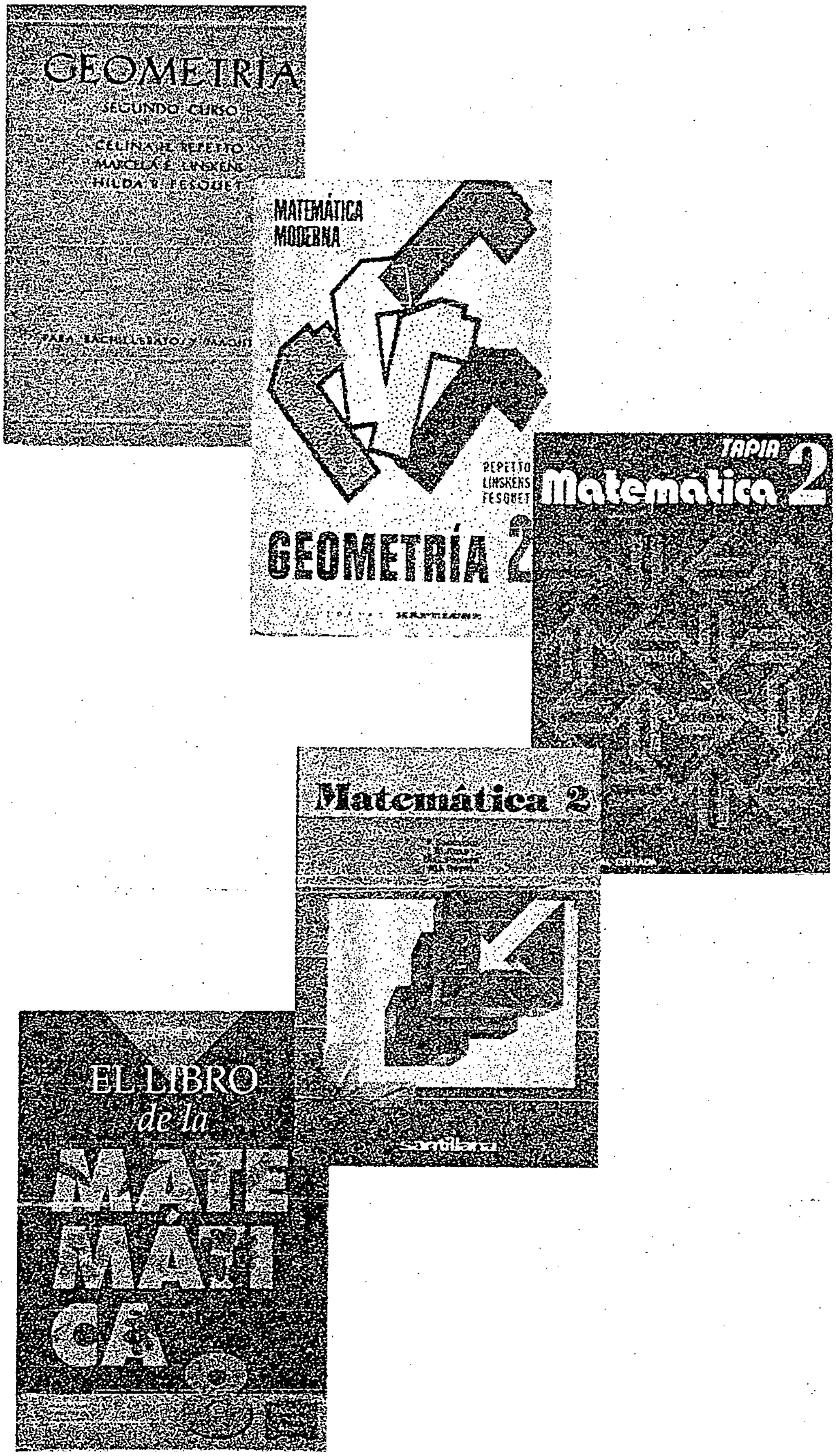
CONSEJO SUPERIOR DE EDUCACIÓN CATÓLICA: *Cursos de Matemática Moderna para profesores*, en **Periódico mensual del CONSUDEC** de mayo de 1966.

7.6. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

MARDONES, J.M. Y URSUA, N.: **Filosofía de las ciencias humanas y sociales**, México, Fontamara, 1982.

TAYLOR, S.J. Y BOGDAN, R.: **Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados**, Barcelona, Paidós, 1996.

8. ANEXOS


GEOMETRIA
SEGUNDO CURSO
MATEMÁTICA MODERNA
REPETTO
LINSKENS
FESQUET
GEOMETRÍA 2
TAPIA
Matematica 2
Matemática 2
EL LIBRO
de la
MATE
MÁTI
CA

GEOMETRÍA

SEGUNDO CURSO

CELINA H. REPETTO
MARCELA E. LINSKENS
HILDA B. FESQUET

PARA BACHILLERATO Y MAGISTERIO

I

ÍNDICE

II

Pág.

Pág.

CAPÍTULO IV

PARALELOGRAMOS Y TRAPECIOS

PARALELOGRAMOS

En el capítulo II hemos visto las propiedades de los cuadriláteros en general; en los teoremas que figuran a continuación estudiaremos las propiedades particulares de los paralelogramos, que, como ya hemos dicho, son los cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos.

20. TEOREMA. *En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales.*

H) $\square ABCD$ *

T) $\overline{AB} = \overline{CD}$
$\overline{BC} = \overline{AD}$

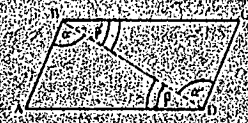


Fig. 23

Demostración. Trazando la diagonal $\overline{BD}$ del $\square ABCD$, éste queda dividido en los triángulos

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD}, \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BD} \text{ común,} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \text{ por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y sec. } BD; \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' \text{ por alternos internos entre } AD \parallel BC \text{ y sec. } BD. \end{cases}$$

Luego, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, resulta:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}.$$

En consecuencia, todos sus elementos homólogos son iguales; entre ellos: $\overline{AB} = \overline{CD}$, por ser lados que se oponen a los ángulos iguales β y β'

y $\overline{BC} = \overline{AD}$, por ser lados que se oponen a los ángulos iguales α' y α.

* $\square ABCD$ se lee: paralelogramo ABCD.

29. Teorema recíproco. *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*

Fig. 24

H)* ABCD cuadrilátero.

$\overline{AB} = \overline{CD}$

y $\overline{BC} = \overline{AD}$

T) ABCD es paralelogramo.

Demostración. Trazando la diagonal $\overline{BD}$, se tiene:

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD}, \text{ en los que: } \begin{cases} \overline{BD} & \text{común;} \\ \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por hipótesis;} \\ \overline{AD} = \overline{BC} & \text{por hipótesis.} \end{cases}$$

Luego, por el 3er. criterio de igualdad de triángulos, resulta:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

y por definición de triángulos iguales, es:

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \text{ y } \hat{\beta} = \hat{\beta}'$$

pero $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$ son alternos internos entre las rectas AB y CD cortadas por BD y como son iguales, dichas rectas son paralelas, es decir:

$$AB \parallel CD \qquad (1)$$

Análogamente $\hat{\beta}$ y $\hat{\beta}'$ son alternos internos entre las rectas BC y AD cortadas por BD y como son iguales, dichas rectas son paralelas, es decir:

$$BC \parallel AD \qquad (2)$$

Las relaciones (1) y (2) indican que los lados opuestos de ABCD son paralelos; luego, de acuerdo con la definición, ABCD es un paralelogramo.

30. Teorema. *En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.*

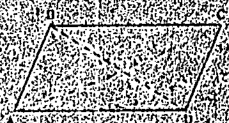


Fig. 25

H) $\overset{\square}{ABCD}$

T) $\hat{A} = \hat{C}$

y $\hat{B} = \hat{D}$

* Conviene que en este teorema recíproco el alumno construya la figura de acuerdo con las condiciones de la hipótesis, es decir, construir un ángulo cualquiera A; sobre sus lados llevar segmentos arbitrarios distintos $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Con centro en B y radio $\overline{AD}$ trazar un arco; con centro en D y radio AB, cortar el arco anterior en el punto C. Unir C con B y D y queda formado el cuadrilátero ABCD, que tiene los lados opuestos iguales y es preciso demostrar que es un paralelogramo.

Demostración. Para demostrar la igualdad de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ se traza la diagonal $\overline{BD}$ del $\overset{\square}{ABCD}$, quedando formados los triángulos:

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD} \text{ que tienen: } \begin{cases} \overline{BD} & \text{común} \\ \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD} \\ \overline{AD} = \overline{BC} & \text{por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD} \end{cases}$$

Luego, por el 3er. criterio de igualdad de triángulos, resulta:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

Y en consecuencia, los ángulos que se oponen al lado común $\overline{BD}$ son iguales, es decir:

$$\hat{A} = \hat{C}$$

Análogamente, trazando la diagonal AC, se demuestra que:

$$\hat{B} = \hat{D}$$

31. Teorema recíproco. *Si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, es paralelogramo.*

H) ABCD cuadrilátero,

$\hat{A} = \hat{C}$

y $\hat{B} = \hat{D}$

T) ABCD es paralelogramo.

Fig. 26

Demostración. Siendo:

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\text{y} \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\text{sumando m. a m.} \quad \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$$

Por otra parte, se sabe que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 4 rectos, es decir:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4 \text{ rectos} \qquad (1)$$

22

o sea, por propiedad asociativa de la suma:

$$(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{C} + \hat{D}) = 4 \text{ rectos};$$

sustituyendo en esta igualdad la suma $(\hat{C} + \hat{D})$ por su igual $(\hat{A} + \hat{B})$:

$$(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{B}) = 4 \text{ rectos}$$

o sea: $\quad 2\,(\hat{A} + \hat{B}) = 4$ rectos

luego: $\quad \hat{A} + \hat{B} = 2$ rectos $\quad$ (2)

es decir $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son suplementarios; pero a la vez son conjugados entre las rectas AD y BC cortadas por la transversal BA; y como si dos rectas al ser cortadas por una tercera forman ángulos conjugados suplementarios, son paralelas; resulta:

$$AD \parallel BC \qquad (3)$$

Como $\quad \hat{A} + \hat{B} = 2$ rectos, según igualdad (2)

y $\quad \hat{A} = \hat{C}$ por hipótesis

reemplazando en (2) $\hat{A}$ por su igual $\hat{C}$, se tiene:

$$\hat{C} + \hat{B} = 2 \text{ rectos}$$

y como estos ángulos son conjugados entre las rectas AB y CD, cortadas por la transversal BC, al ser suplementarios, resulta:

$$AB \parallel CD \qquad (4)$$

Las relaciones (3) y (4) indican que los lados opuestos de ABCD son paralelos; luego, de acuerdo con la definición, ABCD es un paralelogramo.

32. Teorema. *En todo paralelogramo las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.*

H) $\square$ ABCD; $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales.

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en P.

T) $\overline{AP} = \overline{PC}$

$\overline{BP} = \overline{PD}$.

Fig. 27

IX

23

Demostración. Comparemos los triángulos:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABP} \text{ y } \overset{\triangle}{CDP}, \\ \text{que tienen:}\end{array}\right\{\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{CD}, \text{ por lados opuestos de } \square ABCD; \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}', \text{ por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y transv. } AC. \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}', \text{ por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y transv. } BD.\end{array}$$

En consecuencia, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, es

$$\overset{\triangle}{ABP} = \overset{\triangle}{CDP}$$

Luego, los lados de estos triángulos que se oponen a ángulos iguales, son iguales, es decir:

$$\overline{AP} \text{ (opuesto a } \hat{\beta}) = \overline{PC} \text{ (opuesto a } \hat{\beta}')$$

$$\text{y } \overline{BP} \text{ (opuesto a } \hat{\alpha}) = \overline{PD} \text{ (opuesto a } \hat{\alpha}')$$

33. Teorema recíproco. *Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mutuamente en partes iguales, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*

H) cuadrilátero ABCD; $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales que se cortan en O tal que $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$.

T) ABCD es paralelogramo.

Fig. 28

Demostración. Las diagonales del cuadrilátero ABCD determinan cuatro triángulos. Considerando

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABO} \text{ y } \overset{\triangle}{CDO}, \\ \text{que tienen:}\end{array}\right\{\begin{array}{l}\overline{AO} = \overline{OC}, \text{ por hipótesis;} \\ \overline{BO} = \overline{OD}, \text{ por hipótesis;} \\ \widehat{AOB} = \widehat{COD}, \text{ por opuestos por el vértice.}\end{array}$$

resulta, por el primer criterio de igualdad de triángulos:

$$\overset{\triangle}{ABO} = \overset{\triangle}{CDO}$$

y en consecuencia, los lados homólogos son iguales, entre ellos:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \qquad (1)$$

X

Considerando

$\overset{\triangle}{BOC}$ y $\overset{\triangle}{AOD}$ que tienen:
$$\begin{cases} \overline{BO} = \overline{OD} & \text{por hipótesis} \\ \overline{OC} = \overline{AO} & \text{por hipótesis} \\ \widehat{BOC} = \widehat{AOD} & \text{por opuestos por el vértice (1)} \end{cases}$$

resulta, por el primer criterio de igualdad de triángulos:

$$\overset{\triangle}{BOC} = \overset{\triangle}{AOD}$$

y, en consecuencia, los lados homólogos son iguales, entre ellos:

$$\overline{BC} = \overline{AD} \qquad (2)$$

Las relaciones (1) y (2) establecen que los lados opuestos del cuadrilátero ABCD son iguales; pero si un cuadrilátero tiene los lados opuestos iguales es un paralelogramo; luego:

ABCD es un paralelogramo.

34. Teorema. *Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.*

H) ABCD cuadrilátero
$AB \underline{\underline{\parallel}} CD$ * $AB \parallel CD$; $\overline{AB} = \overline{CD}$

T) ABCD paralelogramo

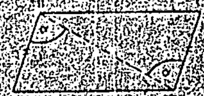


Fig. 29

Demostración. Trazando la diagonal BD del cuadrilátero ABCD, quedan determinados:

$\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{BCD}$ que tienen:
$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por hipótesis} \\ \overline{BD} & \text{común} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' & \text{por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y sec. } BD \end{cases}$$

Luego, por el 1er. criterio de igualdad de triángulos, es:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

y, por lo tanto, los lados homólogos son iguales, entre ellos:

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

y como por hipótesis: $\overline{AB} = \overline{CD}$

* El signo $\underline{\underline{\parallel}}$ se lee: igual y paralelo.

el cuadrilátero ABCD tiene sus pares de lados opuestos iguales; en consecuencia es un paralelogramo.

35. **Bases medias de un paralelogramo.** — El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo se llama *base media*, con respecto a los otros dos lados. Así, en el paralelogramo ABCD de la figura 175, $\overline{MN}$ es la base media con respecto a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$; $\overline{PQ}$ es la base media con respecto a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

Fig. 30

36. Teorema. *La base media de un paralelogramo con respecto a un par de lados es paralela e igual a cada uno de esos lados.*

H) $\overline{MN}$ base media de $\overset{\square}{ABCD}$ con respecto a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

T) $\overline{MN} \underline{\underline{\parallel}} \overline{BC}$
$\overline{MN} \underline{\underline{\parallel}} \overline{AD}$

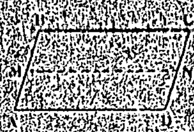


Fig. 30 bis

Demostración. La base media $\overline{MN}$ determina en el paralelogramo ABCD dos cuadriláteros: MBCN y AMND.

El cuadrilátero MBCN tiene:

$\overline{BM} \parallel \overline{CN}$ por pertenecer a lados opuestos del paralelogramo ABCD
$\overline{BM} = \overline{CN}$ por ser mitades de los segmentos iguales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Luego, por el teorema anterior, el cuadrilátero MBCN es paralelogramo y, en consecuencia, los lados opuestos $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ son paralelos por definición de paralelogramo, e iguales por la propiedad estudiada de los lados opuestos de un paralelogramo, es decir:

$$\overline{MN} \underline{\underline{\parallel}} \overline{BC} \qquad (1)$$

y como $\overline{BC} \underline{\underline{\parallel}} \overline{AD}$ por lados opuestos de $\overset{\square}{ABCD}$

es, por carác. trans. $\overline{MN} \underline{\underline{\parallel}} \overline{AD}$ (2)

Las relaciones (1) y (2) constituyen la tesis del teorema.

37. **Centro de simetría del paralelogramo.** — Teorema. *La intersección de las diagonales de un paralelogramo es centro de simetría del mismo.*

H) $\overset{\square}{ABCD}$, O intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

T) O centro de simetría de $\overset{\square}{ABCD}$

26

Demostración. Por propiedad de las diagonales del paralelogramo, el punto de intersección O es punto medio de las mismas. Luego, A y C son simétricos respecto de O; y B y D también. Cualquier otro punto del paralelogramo, por ejemplo el M, también tiene su simétrico respecto de O en el paralelogramo. En efecto, trazando la recta MO, determina con el contorno otro punto M', que es simétrico de M con respecto a O, pues $\overline{M'O} = \overline{OM}$ por ser:

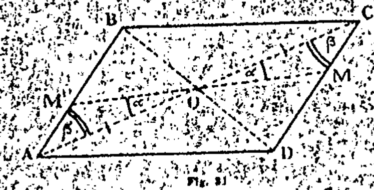


Fig. 31

$$\hat{AM'O} = \hat{OMC}, \text{ pues } \begin{cases} \overline{AO} = \overline{OC} \text{ por ser O punto medio de } \overline{AC} \\ \hat{\alpha'} = \hat{\alpha} \text{ por opuestos por el vértice} \\ \hat{\beta'} = \hat{\beta} \text{ por alternos internos entre } AB \,//\, CD \text{ y transversal } AC \end{cases}$$

Como M es un punto cualquiera del contorno, queda demostrado en general, que todo punto del contorno tiene su simétrico con respecto a O en el mismo, es decir, que O es centro de simetría del paralelogramo.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Demostrar que en un paralelogramo dos vértices opuestos equidistan de la diagonal que une los otros dos.

2. En el $\square$ABCD (fig. 33) se traza la bisectriz del $\hat{A}$ obtuso. Esta bisectriz corta a $\overline{DC}$ en E y a la prolongación de $\overline{BC}$ en F. Demostrar que $\hat{ADE}$ y $\hat{ECF}$ son isósceles.

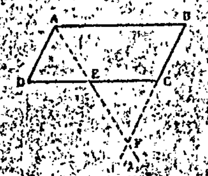


Fig. 32

Fig. 33

XIII

27

3. Dados: $\hat{MNP}$ (fig. 33); $\overline{MM'}$ mediana correspondiente al lado $\overline{NP}$; M'A opuesta a M'M y $\overline{M'A} = \overline{M'M}$. Demostrar que el cuadrilátero MNAP, que se obtiene al unir A con N y P, es un paralelogramo.

4. Un ángulo de un paralelogramo es de 64°. Calcular los otros tres ángulos.

5. Un lado de un paralelogramo es de 6 cm. El perímetro es de 20 cm. Calcular los otros tres lados.

6. Un ángulo exterior de un paralelogramo es de 108°. Calcular los cuatro ángulos interiores del paralelogramo.

CONSTRUCCIÓN DE PARALELOGRAMOS CONOCIENDO TRES ELEMENTOS

7. Construir un paralelogramo dados dos lados consecutivos y el ángulo comprendido.

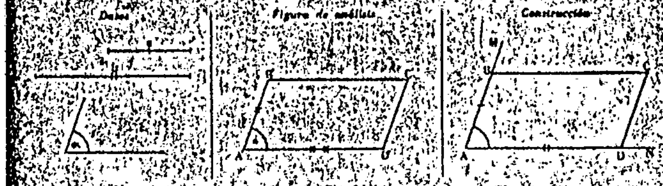


Fig. 34

Razonando sobre la figura de análisis es inmediato que, para obtener el paralelogramo pedido, se procede así:

Se construye $\hat{MAN} = \alpha$; sobre AM se determina $\overline{AB} = a$; sobre AN se determina $\overline{AD} = b$; y tenemos ya tres vértices A, B y D del paralelogramo; para determinar el cuarto vértice C, se puede proceder de distintas formas:

1er. Procedimiento. Se traza por B una paralela a AD y por D una paralela a AB; la intersección de estas dos paralelas es el punto C.

2do. Procedimiento. Se traza el arco de circunferencia de centro B y radio b y el de centro D y radio a, que se cortan en C.

3er. Procedimiento. Se traza por B una paralela a AD y sobre ella se determina $\overline{BC} = b$.

Una vez obtenido el vértice C por cualquiera de los procedimientos indicados, se une C con B y D y se obtiene el $\square$ABDC pedido.

XIV

28

Condición de posibilidad. Cualesquiera sean los segmentos datos a y b, siempre que el $\hat{\alpha}$ sea menor que un ángulo llano, el problema tiene solución.

8. Construir un paralelogramo conociendo dos lados consecutivos y una diagonal.

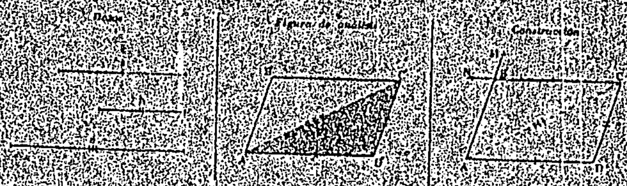


Fig. 35

Observando la figura de análisis es evidente que, para poder construir el paralelogramo pedido, es cómoda la construcción previa del $\overset{\triangle}{ADC}$ del cual se conocen sus tres lados.

Construcción. Se construye $\overset{\triangle}{ADC}$ de lados a, b, y d. Para determinar el 4.º vértice B se sigue cualquiera de los procedimientos indicados en el 1er. problema. Uniendo B con A y C se tiene el paralelogramo pedido.

Condición de posibilidad. Como los tres segmentos datos son los lados del $\overset{\triangle}{ADC}$ deben satisfacer la propiedad triangular, es decir, cada uno de ellos debe ser menor que la suma y mayor que la diferencia de los otros dos.

9. Construir un paralelogramo dados un lado y las dos diagonales.

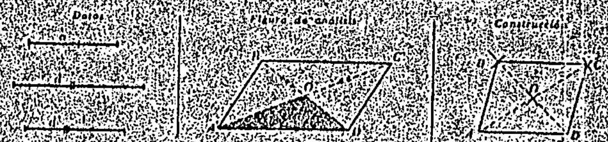


Fig. 36

Al trazar las diagonales en la figura de análisis, se observa que para poder construir el paralelogramo pedido es cómoda la construcción previa del $\overset{\triangle}{AOD}$, del cual se conocen sus tres lados: $\overline{AD}$ por ser dato y $\overline{AO}$ y $\overline{OD}$ respectivamente iguales a la mitad de las diagonales dadas.

Construcción. Se construye el $\overset{\triangle}{AOD}$ de lados $\overline{AD} = a$, $\overline{AO} = \frac{d}{2}$ y $\overline{OD} = \frac{d'}{2}$.

XV

29

Por O se prolongan $\overline{AO}$ y $\overline{DO}$ y se determinan respectivamente $\overline{OC} = \overline{AO}$ y $\overline{BO} = \overline{DO}$. Se unen A con B, B con C y C con D obteniéndose el paralelogramo ABCD pedido.

Condición de posibilidad. Como los segmentos a, $\frac{d}{2}$ y $\frac{d'}{2}$ son los lados del $\overset{\triangle}{AOD}$ los datos deben ser tales que dichos segmentos cumplan la propiedad triangular.

10. Construir un paralelogramo dados: las dos diagonales y uno de los ángulos que ellas forman al cortarse.

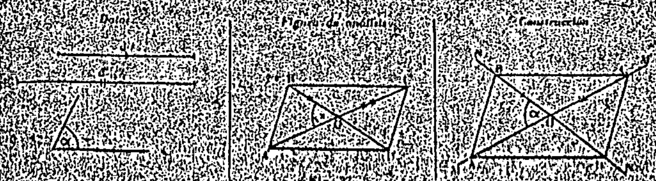


Fig. 37

Observando la figura de análisis es inmediato que para obtener el paralelogramo pedido se procede así:

Se construye $\hat{MON} = \hat{\alpha}$. Se trazan las semirrectas $\overrightarrow{OM'}$ y $\overrightarrow{ON'}$ opuestos a los lados del ángulo. Sobre la $\overrightarrow{OM}$ y la $\overrightarrow{OM'}$ se determina $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{d}{2}$, sobre la $\overrightarrow{ON}$ y la $\overrightarrow{ON'}$ se determina $\overline{OB} = \overline{OD} = \frac{d'}{2}$. Al unir los puntos A, B, C y D se obtiene el paralelogramo pedido.

Condición de posibilidad. Como en el primer problema, cualesquiera sean los segmentos d y d', siempre que $\hat{\alpha}$ sea menor que un ángulo llano, el problema tiene solución.

11. Construir un paralelogramo en el que dos lados consecutivos son de 10 cm y 6 cm respectivamente y el ángulo comprendido 60°.

12. Construir un paralelogramo en el que un lado es de 12 cm, el consecutivo de 6 cm y la diagonal que une los vértices no comunes de esos lados de 15 cm.

13. Las diagonales de un paralelogramo son de 8 cm y 6 cm respectivamente y forman, al cortarse, un ángulo de 50°. Construir el paralelogramo al que pertenecen.

14. Las diagonales de un paralelogramo son de 10 cm y 8 cm, uno de los lados de 5 cm. Construir dicho paralelogramo.

15. Construir un paralelogramo dados: una diagonal, un lado y el ángulo que ellos forman.

XVI

XVII

ÍNDICE

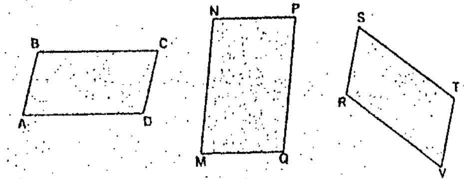
VII

XVIII

3 PARALELOGRAMOS

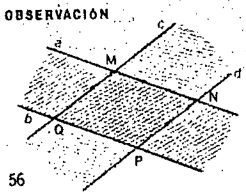
Definición. Se llaman paralelogramos los cuadriláteros que tienen los dos pares de lados opuestos paralelos.

Así, son paralelogramos los tres cuadriláteros siguientes:



AB ∥ CD y AD ∥ BC   MN ∥ PQ y NP ∥ MQ   RS ∥ TV y RV ∥ ST

OBSERVACIÓN



Si se consideran dos bandas secantes, por ejemplo la banda *ab* y la banda *cd*, se observa que la intersección de esas bandas es el paralelogramo MNPQ. Es decir, también puede darse la siguiente:

> **Definición.** Paralelogramo es el cuadrilátero determinado por la intersección de dos bandas secantes.

Notación. Se indica que ABCD es un paralelogramo dibujando sobre las letras de los vértices del mismo un pequeño paralelogramo.

Así:

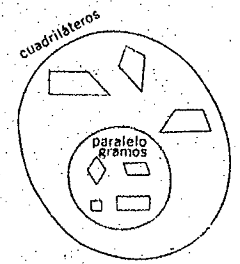
$\overset{\square}{ABCD}$ se lee paralelogramo ABCD

Como los paralelogramos son cuadriláteros que, además, cumplen la condición de tener sus dos pares de lados opuestos paralelos, resulta que los paralelogramos son un subconjunto de los cuadriláteros; es decir, el conjunto de los paralelogramos está incluido en el conjunto de los cuadriláteros.

Simbólicamente:

Conjunto paralelogramos $\subset$ conjunto cuadriláteros

Gráficamente:



Por ser cuadriláteros, los paralelogramos gozan de todas las propiedades de los cuadriláteros, pero además, por la particularidad de tener los dos pares de lados opuestos paralelos, tienen otras propiedades que les son características y que se estudian a continuación.

Propiedades de los paralelogramos

Al observar un paralelogramo cualquiera, se nota a simple vista que los lados opuestos son iguales. Esto puede comprobarse midiendo los lados opuestos de los tres primeros paralelogramos presentados en este capítulo. Efectivamente, resulta:

en el primer paralelogramo: $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$

en el segundo paralelogramo: $\overline{MN} = \overline{PQ}$ y $\overline{NP} = \overline{MQ}$

en el tercer paralelogramo: $\overline{RS} = \overline{TV}$ y $\overline{RV} = \overline{ST}$

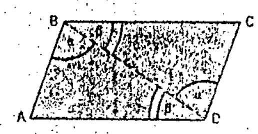
A continuación se demuestra esta propiedad en el siguiente:

- TEOREMA: *En todo paralelogramo, los lados opuestos son iguales*

H) $\overset{\square}{ABCD}$

T) $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{BC} = \overline{AD}$



Demostración: Trazando la diagonal $\overline{BD}$, el $\overset{\square}{ABCD}$ queda dividido en los triángulos:

$\overset{\triangle}{ABD}$ y $\overset{\triangle}{BCD}$ que tienen $\begin{cases} \overline{BD} & \text{común;} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' & \text{por alternos internos entre } AB \parallel CD \text{ y transv. } BD; \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' & \text{por alternos internos entre } AD \parallel BC \text{ y transv. } BD. \end{cases}$

Luego, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales.

En consecuencia, todos sus elementos homólogos son iguales; entre ellos:

$\overline{AB} = \overline{CD}$

por ser lados que se oponen a los ángulos iguales $\hat{\beta}'$ y $\hat{\beta}$,

$$y \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

por ser lados que se oponen a los ángulos iguales $\hat{\alpha}'$ y $\hat{\alpha}$.

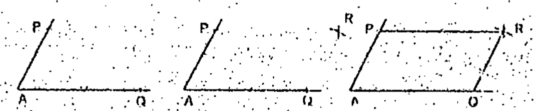
Se ha llegado a establecer así las igualdades de la tesis y por lo tanto el teorema queda demostrado.

A continuación se construye un cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos iguales. Para ello se procede así:

Se construye un ángulo cualquiera, $\hat{A}$, y sobre sus lados se determinan segmentos arbitrarios, $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$; con centro en P y radio $\overline{AQ}$ se traza un arco, y con centro en Q y radio $\overline{AP}$ se corta dicho arco; quedando determinado el punto R. Se une R con P y Q, quedando formado el cuadrilátero APRQ, que por construcción tiene los dos pares de lados opuestos iguales. En efecto:

lado $\overline{AP}$ = lado $\overline{QR}$ por ser $\overline{QR}$ radio de la circunferencia de centro Q y radio $\overline{AP}$;

y lado $\overline{AQ}$ = lado $\overline{PR}$, pues $\overline{PR}$ es radio de la circunferencia de centro P y radio $\overline{AQ}$.

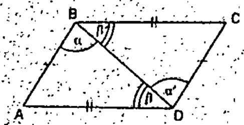


El cuadrilátero obtenido parece ser un paralelogramo, y en efecto lo es. Esta propiedad, que es general, es la recíproca de la establecida en el teorema anterior, y se demuestra en el siguiente:

Teorema recíproco. *Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*

H) Cuadrilátero ABCD
$\overline{AB} = \overline{CD}$
$\overline{BC} = \overline{AD}$

T) ABCD es un paralelogramo.



Demostración: Trazando la diagonal $\overline{BD}$, quedan formados los triángulos:

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD} \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BD} & \text{común;} \\ \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por hipótesis;} \\ \overline{AD} = \overline{BC} & \text{por hipótesis.} \end{cases}$$

Luego, por el tercer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales, es decir:

$$\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{BCD}$$

En consecuencia, sus elementos homólogos también lo son; entre ellos:

$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ por ser los ángulos que se oponen, respectivamente, a los lados iguales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

y $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$ por ser los ángulos que se oponen, respectivamente, a los lados iguales $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$,

pero $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$ son alternos internos entre las rectas AB y CD cortadas por la transversal BD, y, como son iguales, dichas rectas son paralelas, es decir:

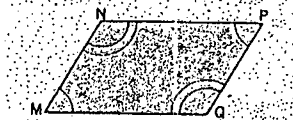
$$AB \parallel CD \qquad [1]$$

Análogamente, $\hat{\beta}$ y $\hat{\beta}'$ son alternos internos entre las rectas BC y AD cortadas por la transversal BD, y, como son iguales, dichas rectas son paralelas, es decir:

$$BC \parallel AD \qquad [2]$$

Las relaciones [1] y [2] indican que los dos pares de lados opuestos de ABCD son paralelos; luego, de acuerdo con la definición, ABCD es un paralelogramo, y por lo tanto el teorema queda demostrado.

Sea el paralelogramo MNPQ. Considerando dos de los ángulos opuestos, por ejemplo el $\hat{M}$ y el $\hat{P}$, los dos son agudos, y si se miden se comprueba que son iguales entre sí.



Análogamente, si se consideran los otros dos ángulos opuestos $\hat{N}$ y $\hat{Q}$, se observa que los dos son obtusos, y también al medirlos resultan iguales entre sí.

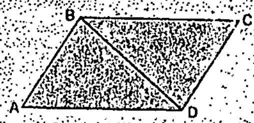
Esta propiedad de los ángulos opuestos de un paralelogramo es válida en general, y se demuestra en el siguiente:

• TEOREMA: *En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.*

H) $\overset{\square}{ABCD}$

T) $\hat{A} = \hat{C}$

$\hat{B} = \hat{D}$



Demostración: Para demostrar la igualdad de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ se traza la diagonal $\overline{BD}$ del $\overset{\square}{ABCD}$, quedando formados los triángulos:

$$\overset{\triangle}{ABD} \text{ y } \overset{\triangle}{BCD} \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BD} \text{ común;} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \text{ por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD}; \\ \overline{AD} = \overline{BC} \text{ por lados opuestos del } \overset{\square}{ABCD}. \end{cases}$$

Luego, por el tercer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales.

Y, en consecuencia, los ángulos que en cada uno de los triángulos se oponen al lado común $\overline{BD}$ son iguales, es decir:

$$\hat{A} = \hat{C}$$

Análogamente, trazando la diagonal $\overline{AC}$, se demuestra que:

$$\hat{B} = \hat{D}$$

y, por lo tanto, el teorema queda demostrado.

Obsérvese que este teorema puede demostrarse siguiendo otro camino. Por ejemplo: los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son conjugados internos entre las paralelas AD y BC, cortadas por la transversal AB; en consecuencia, son suplementarios, es decir:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180° \qquad [1]$$

Pero también $\hat{C}$ y $\hat{B}$ son conjugados internos entre las paralelas AB y CD, cortadas por la transversal BC; luego, son suplementarios, es decir:

$$\hat{C} + \hat{B} = 180° \qquad [2]$$

De [1] y [2] resulta: $\hat{A} = \hat{C}$, por tener el mismo suplemento B.

Análogamente se demuestra la igualdad: $\hat{B} = \hat{D}$.

En la demostración también pueden seguirse otros caminos diferentes, es decir que para establecer un teorema, muchas veces puede procederse de distintas formas, y siempre que las deducciones sean correctas son igualmente aceptables.

La propiedad que se estudió en el teorema anterior goza de la propiedad recíproca, que se demuestra en el siguiente:

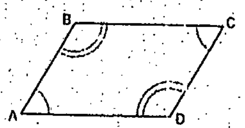
Teorema recíproco. *Si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, es un paralelogramo.*

H) Cuadrilátero ABCD

$\hat{A} = \hat{C}$

$\hat{B} = \hat{D}$

T) ABCD es un paralelogramo



Demostración: Siendo:

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \text{por hipótesis}$$

$$y \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \text{por hipótesis;}$$

sumando m. a m. $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$.

Por otra parte, se sabe que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 4 rectos, es decir:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 4 \text{ rectos}$$

o sea, por propiedad asociativa de la suma:

$$(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{C} + \hat{D}) = 4 \text{ rectos}$$

sustituyendo en esta igualdad la suma $(\hat{C} + \hat{D})$ por su igual $(\hat{A} + \hat{B})$, se tiene: $(\hat{A} + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{B}) = 4$ rectos

o sea: $2\,(\hat{A} + \hat{B}) = 4$ rectos

luego: $\hat{A} + \hat{B} = 2$ rectos [1]

es decir, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son suplementarios; pero, por su posición, a la vez son conjugados entre las rectas AD y BC cortadas por la transversal BA, y como si dos rectas al ser cortadas por una tercera forman ángulos conjugados suplementarios, son paralelas, resulta:

AD // BC [2]

Como

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \text{por hipótesis}$$

reemplazando en [1] $\hat{A}$ por su igual $\hat{C}$, se tiene:

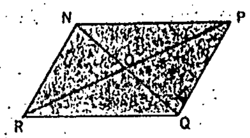
$$\hat{C} + \hat{B} = 2 \text{ rectos}$$

y como estos ángulos son conjugados entre las rectas AB y CD, cortadas por la transversal BC, al ser suplementarios, resulta:

AB // CD [3]

Las relaciones [2] y [3] indican que los lados opuestos de ABCD son paralelos; luego, de acuerdo con la definición, ABCD es un paralelogramo, y el teorema queda demostrado.

Si en el paralelogramo RNPQ se trazan las diagonales $\overline{RP}$ y $\overline{NQ}$, éstas se cortan en el punto O. Puede comprobarse que el segmento $\overline{RO}$ es igual al segmento $\overline{OP}$, es decir, que O es el punto medio de la diagonal $\overline{RP}$, o, lo que es lo mismo, que O divide a dicha diagonal en partes iguales.



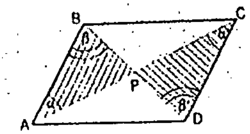
Análogamente, puede comprobarse que el segmento $\overline{NO}$ es igual al segmento $\overline{OQ}$, es decir que ese punto O es también el punto medio de la diagonal $\overline{NQ}$, o sea que la divide en dos partes iguales. Esta propiedad de las diagonales se verifica en todo paralelogramo y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA: *En todo paralelogramo las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.*

H) ▱ABCD

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales;

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en P



T) $\overline{AP} = \overline{PC}$

$\overline{BP} = \overline{PD}$

Demostración: Se comparan los triángulos:

$\widehat{ABP}$ y $\widehat{CDP}$ que tienen
$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por lados opuestos de ABCD} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' & \text{por alternos internos entre AB} \parallel \text{CD y transversal AC} \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' & \text{por alternos internos entre AB} \parallel \text{CD y transversal BD} \end{array}\right.$$

En consecuencia, por el segundo criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales.

Luego, los lados de estos triángulos que se oponen a ángulos iguales, son iguales, es decir:

$\overline{AP}$ (opuesto a $\hat{\beta}$) $= \overline{PC}$ (opuesto a $\hat{\beta}'$)

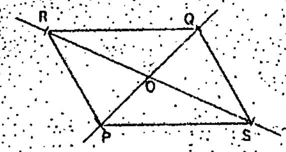
y $\overline{BP}$ (opuesto a $\hat{\alpha}$) $= \overline{PD}$ (opuesto a $\hat{\alpha}'$)

Estas igualdades que se acaban de establecer son las de la tesis, y en consecuencia el teorema queda demostrado.

Si se consideran dos rectas que se cortan en un punto O y en una de ellas, a partir de O, se determinan los segmentos iguales $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$, y en la otra, también a partir de O, se determinan los segmentos iguales $\overline{OR}$ y $\overline{OS}$, trazando los segmentos $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$, $\overline{QS}$ y $\overline{SP}$ queda determinado el cuadrilátero PRQS. Las diagonales de este cuadrilátero $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, de acuerdo con la construcción, se cortan en partes iguales, pues:

$\overline{PO} = \overline{OQ}$

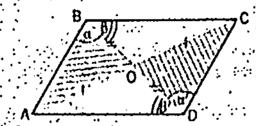
y $\overline{OR} = \overline{OS}$



y se ve a simple vista que este cuadrilátero es un paralelogramo.

Esta observación es general y se enuncia en el siguiente:

Teorema recíproco. *Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mutuamente en partes iguales, dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*



H) Cuadrilátero ABCD

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales que se cortan en O

tal que $\overline{AO} = \overline{OC}$

y $\overline{BO} = \overline{OD}$

T) ABCD es un paralelogramo

Demostración: Las diagonales del cuadrilátero ABCD determinan cuatro triángulos. Si se consideran entre ellos,

$\widehat{ABO}$ y $\widehat{CDO}$ que tienen
$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{AO} = \overline{OC} & \text{por hipótesis} \\ \overline{BO} = \overline{OD} & \text{por hipótesis} \\ \widehat{AOB} = \widehat{COD} & \text{por opuestos por el vértice} \end{array}\right.$$

resulta, por el primer criterio de igualdad de triángulos, que estos triángulos son iguales y, en consecuencia, los elementos homólogos también lo son, entre ellos:

$\hat{\alpha}$ (opuesto a $\overline{AO}$) $= \hat{\alpha}'$ (opuesto a $\overline{OC}$)

Pero como $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$ son alternos internos entre las rectas AB y CD cortadas por la transversal BD, por ser estos ángulos iguales, las rectas son paralelas, es decir:

AB $\parallel$ CD [1]

Si se consideran los otros dos triángulos

$$\widehat{BOC} \text{ y } \widehat{AOD} \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BO} = \overline{OD} & \text{por hipótesis} \\ \overline{OC} = \overline{AO} & \text{por hipótesis} \\ \widehat{BOC} = \widehat{AOD} & \text{por opuestos por el vértice} \end{cases}$$

resulta, por el primer criterio de igualdad de triángulos, que estos triángulos son iguales.

En consecuencia, los elementos homólogos también lo son, entre ellos:

$$\hat{\beta} \text{ (opuesto a } \overline{OC}) = \hat{\beta}' \text{ (opuesto a } \overline{OA})$$

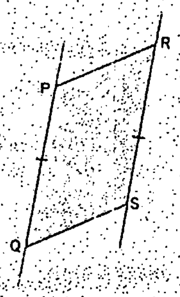
Pero como $\hat{\beta}$ y $\hat{\beta}'$ son alternos internos entre las rectas BC y AD cortadas por la transversal BD, por ser iguales, las rectas son paralelas, es decir:

$$BC \,/\!/\, AD \qquad [2]$$

Las relaciones [1] y [2] establecen que los lados opuestos del cuadrilátero son paralelos; en consecuencia, el cuadrilátero es un paralelogramo, es decir, ABCD es un paralelogramo, y el teorema queda demostrado.

Si se trazan dos rectas paralelas y en ellas se determinan dos segmentos iguales, por ejemplo

$$\overline{PQ} = \overline{RS}$$



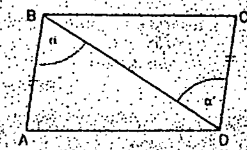
y se une P con R, y Q con S, queda determinado el cuadrilátero PRSQ, que tiene un par de lados opuestos, el $\overline{PQ}$ y el $\overline{RS}$, que cumplen la doble condición de ser iguales y paralelos, es decir, simbólicamente:

$$\overline{PQ} \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \overline{RS}$$

Se observa que este cuadrilátero resulta un paralelogramo.

Esta conclusión es general y se demuestra en el siguiente:

TEOREMA: *Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.*



H) Cuadrilátero ABCD

$AB \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CD$

T) ABCD es un paralelogramo

Demostración: trazando la diagonal $\overline{BD}$ del cuadrilátero ABCD, quedan determinados los triángulos

$$\widehat{ABD} \text{ y } \widehat{BCD} \text{ que tienen } \begin{cases} \overline{BD} & \text{común} \\ \overline{AB} = \overline{CD} & \text{por hipótesis} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' & \text{por alternos internos entre } AB \,/\!/\, CD \text{ y transversal BD} \end{cases}$$

Luego, por el primer criterio de igualdad de triángulos, estos triángulos son iguales.

Por lo tanto, los lados homólogos son iguales; entre ellos:

$$\overline{AD} = \overline{BC}$$

Además, por hipótesis:

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

Luego, el cuadrilátero ABCD tiene sus dos pares de lados opuestos iguales; en consecuencia es un paralelogramo, y el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN

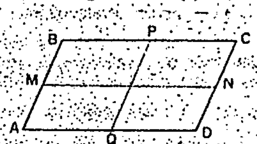
Los teoremas recíprocos establecen las condiciones suficientes para reconocer si un cuadrilátero es un paralelogramo. Así, de acuerdo con lo demostrado, basta saber que un cuadrilátero tiene sus dos pares de lados opuestos iguales para establecer que es un paralelogramo; o bien basta saber que un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales para afirmar que es un paralelogramo; o bien basta saber que en un cuadrilátero las diagonales se cortan en partes iguales para asegurar que es un paralelogramo.

El teorema anterior también establece una condición suficiente para reconocer que un cuadrilátero es un paralelogramo.

Es de observar que en la definición de paralelogramo y en los teoremas recíprocos se establece una sola condición a los dos pares de lados opuestos para saber que es un paralelogramo o bien que los dos pares de lados opuestos sean paralelos, o bien que los dos pares de lados opuestos sean iguales; en cambio, el teorema anterior exige a un solo par de lados opuestos, pero la doble condición de ser paralelos e iguales, para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

Bases medias de un paralelogramo. El segmento que tiene por extremos los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo se llama *base media*, con respecto a los otros dos lados.

Así, en el paralelogramo $\overset{\square}{ABCD}$ de la figura:



M es el punto medio del lado $\overline{AB}$; N es el punto medio del lado $\overline{CD}$.

Luego:

$\overline{MN}$ es la base media con respecto a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

Por otra parte:

P es el punto medio del lado $\overline{BC}$; Q es el punto medio del lado $\overline{AD}$.

Luego:

$\overline{PQ}$ es la base media con respecto a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

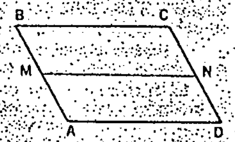
Si se observa la base media $\overline{MN}$ del paralelogramo anterior, parece ser paralela a las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ e igual a cada una de ellas. En efecto, es así y se demuestra con carácter general en el siguiente:

TEOREMA: *La base media de un paralelogramo con respecto a un par de lados es paralela e igual a cada uno de esos lados.*

H) $\overline{MN}$ base media de $\overset{\square}{ABCD}$ con respecto a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$

T) $\overline{MN} \;\underline{\underline{\parallel}}\; \overline{BC}$

$\overline{MN} \;\underline{\underline{\parallel}}\; \overline{AD}$



Demostración: La base media $\overline{MN}$ determina en el paralelogramo ABCD dos cuadriláteros: MBCN y AMND.

El cuadrilátero MBCN tiene:

$\overline{BM} \parallel \overline{CN}$ por pertenecer a lados opuestos del paralelogramo ABCD

$\overline{BM} = \overline{CN}$ por ser mitades de los segmentos iguales: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Luego, el cuadrilátero MBCN tiene dos lados opuestos iguales y paralelos; por lo tanto es un paralelogramo.

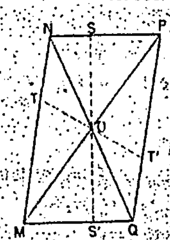
En consecuencia, los otros dos lados opuestos $\overline{MN}$ y $\overline{BC}$ son paralelos por definición de paralelogramo, e iguales por la propiedad estudiada de los lados opuestos de un paralelogramo, es decir:

$$\overline{MN} \;\underline{\underline{\parallel}}\; \overline{BC} \qquad [1]$$

y como $\overline{BC} \;\underline{\underline{\parallel}}\; \overline{AD}$ por lados opuestos de $\overset{\square}{ABCD}$

es, por carác. trans.: $\overline{MN} \;\underline{\underline{\parallel}}\; \overline{AD}$ [2]

Las relaciones [1] y [2] constituyen la tesis del teorema, el cual queda así demostrado.



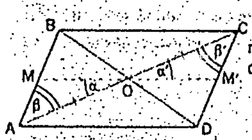
Centro de simetría del paralelogramo. Si en el $\overset{\square}{MNPQ}$ se trazan las diagonales, éstas se cortan en el punto O, y se observa que cualquier punto del paralelogramo tiene su simétrico con respecto a O en el mismo paralelogramo. Así, el simétrico de M con respecto a O es P; el de N es Q; el de S es S'; el de T es T'; etc. De acuerdo con la definición de centro de simetría de una figura, resulta que:

TEOREMA: *La intersección de las diagonales de un paralelogramo es centro de simetría del mismo.*

H) $\overset{\square}{ABCD}$

O, intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

T) O, centro de simetría del $\overset{\square}{ABCD}$.



Demostración: Por propiedad de las diagonales del paralelogramo el punto de intersección O es punto medio de las mismas.

Luego:

$$\overline{AO} = \overline{OC}$$

y, por lo tanto, los puntos A y C son simétricos con respecto a O.

Análogamente,

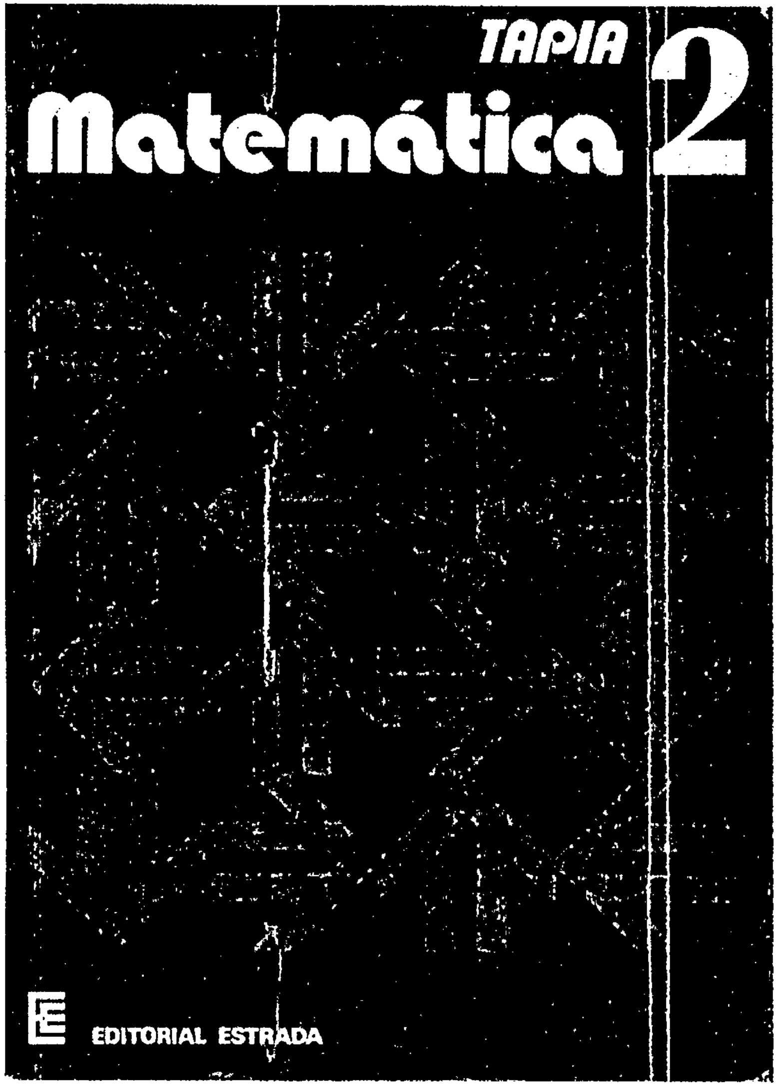
$$\overline{BO} = \overline{OD}$$

y, por lo tanto, B y D son simétricos con respecto a O. Cualquier otro punto del paralelogramo, por ejemplo el M, también tiene su simétrico respecto de O en el paralelogramo. En efecto, trazando la recta MO, determina con el contorno otro punto M', que es simétrico de M con respecto a O, pues $\overline{M'O} = \overline{OM}$ por ser:

$\overset{\triangle}{AMO} = \overset{\triangle}{OM'C}$, pues $\begin{cases} \overline{AO} = \overline{OC} & \text{por ser O punto medio de } \overline{AC} \\ \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' & \text{por opuestos por el vértice} \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' & \text{por alternos internos entre AB} \parallel \text{CD y transversal AC} \end{cases}$

Como M es un punto cualquiera del contorno, queda demostrado, en general, que todo punto del contorno tiene su simétrico respecto de O en el mismo contorno; y, por lo tanto, que O es centro de simetría del paralelogramo.

NOTA: El paralelogramo, en general, no tiene eje de simetría.



XXXVIII

Índice

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

4

XXXIX

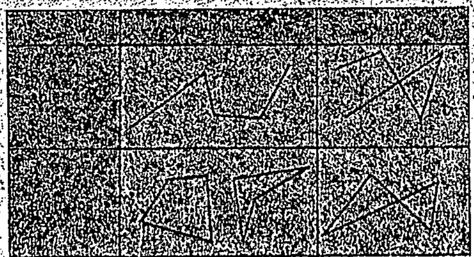
7 Cuadriláteros y cuadrángulos

I Definiciones. Elementos

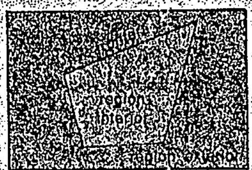
Hasta ahora has estudiado las propiedades de los multiláteros y de los polígonos en general y las de los triángulos y triláteros en particular. En este capítulo estudiaremos las propiedades de los multiláteros de cuatro lados.

Un multilátero de cuatro lados se llama cuadrilátero.

CUADRILÁTEROS



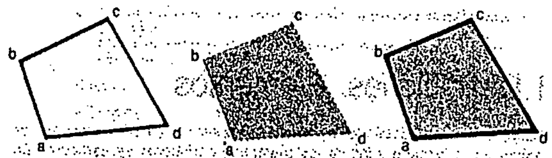
Nos interesan especialmente los cuadriláteros simples cerrados.



Todo cuadrilátero simple cerrado separa al plano en dos regiones: una región interior y una región exterior.
El cuadrilátero es el elemento de separación o frontera.

Región cuadrangular. Cuadrángulo

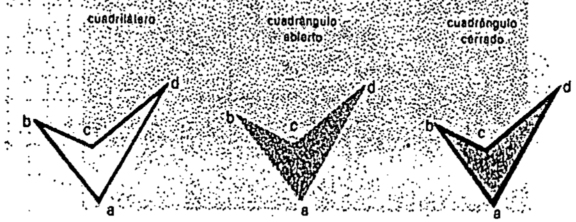
Dado un cuadrilátero simple cerrado abcd, se llama cuadrángulo o región cuadrangular a la figura formada por los puntos del cuadrilátero y los interiores a él.



cuadrilátero abcd $\cup$ región interior al cuadrilátero abcd = cuadrángulo abcd (convexo)

El conjunto de puntos interiores del cuadrilátero se llama cuadrángulo abierto. (Excluido el contorno.)

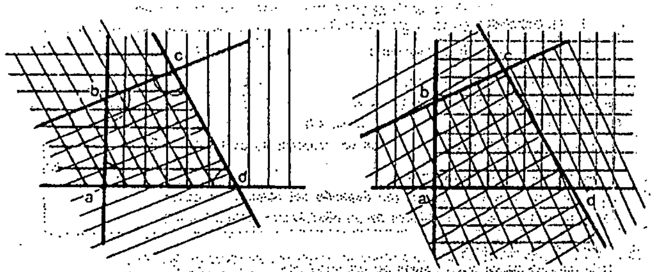
Un cuadrángulo puede ser convexo o cóncavo.



cuadrilátero abcd $\cup$ región interior al cuadrilátero abcd = cuadrángulo abcd (cóncavo)

Como nos interesa especialmente estudiar las propiedades de los cuadrángulos convexos, de ahora en adelante, cada vez que se diga cuadrángulo debe entenderse que se trata de un cuadrángulo convexo.

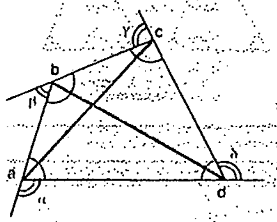
Un cuadrángulo convexo puede definirse como la intersección de ángulos o de semiplanos tal como se han definido los triángulos.



$\widehat{abc} \cap \widehat{bcd} \cap \widehat{cda} \cap \widehat{dab} =$ = cuadrángulo abcd | spl. (ab, c) ∩ spl. (bc, d) ∩ spl. (cd, a) ∩ spl. (da, b) = = cuadrángulo abcd

Elementos de un cuadrilátero o de un cuadrángulo

Si bien hemos establecido la diferencia entre cuadriláteros y cuadrángulos, los elementos y sus propiedades o los nombres de cuadriláteros especiales, pueden referirse tanto a los cuadriláteros como a los cuadrángulos.



a, b, c, d : vértices

$\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{da}$: lados

$\widehat{abc}$, $\widehat{bcd}$, $\widehat{cda}$, $\widehat{dab}$: ángulos interiores

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$: ángulos exteriores

Propiedades de los cuadrángulos convexos

Las propiedades enunciadas para los polígonos son válidas para los cuadrángulos. En este caso el número de lados del polígono es $n = 4$.

1. Número de diagonales.

   a) Nº de diagonales por un vértice $= n - 3$

   Nº de diagonales por un vértice $= 4 - 3 = 1$

   Por cada vértice de un cuadrángulo pasa una diagonal.

   b) Nº de diagonales $= \dfrac{n\,(n-3)}{2}$

   Nº de diagonales $= \dfrac{4\,(4-3)}{2} = 2$

   Un cuadrilátero tiene dos diagonales.

2. Suma de los ángulos interiores.

   Suma ángulos interiores $= 2R\,(n - 2)$

   Suma ángulos interiores $= 2R\,(4 - 2) = 4\,R$

   La suma de los ángulos interiores de un cuadrángulo es igual a 4 R.

3. Suma de los ángulos exteriores.

   Suma ángulos exteriores $= 4\,R$ (no depende del número de lados).

   La suma de los ángulos exteriores de un cuadrángulo es igual a 4 R.

4. Propiedad de los lados.

   Cada lado es menor que la suma de los otros tres.

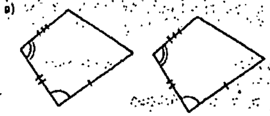
   $\overline{ab} < \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{da}$ (se verifica para cada lado).

5. Condiciones necesarias y suficientes para que dos cuadriláteros sean congruentes.

   a) Si dos cuadrángulos tienen 3 lados y los 2 ángulos comprendidos respectivamente congruentes, son congruentes (n-1 lados y n-2 lados).

   b) Si dos cuadrángulos tienen 2 lados y los 3 ángulos adyacentes respectivamente congruentes, son congruentes (n-2 lados y n-1 ángulos).

a)



3 lados y 2 ángulos congruentes

b)

2 lados y 3 ángulos congruentes

EJERCICIOS

1 ¿Qué diferencia hay entre un cuadrilátero abierto y un cuadrángulo abierto? Dibuja un ejemplo de cada figura.

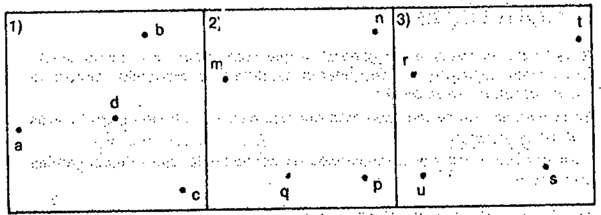
2 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son ángulos interiores de un cuadrilátero. Calcula en cada caso el ángulo que falta.

	α	β	γ	δ
a	89°	132°	49°	
b	27° 15′	100° 30′		85° 20′
c		123° 18′	97° 35′	68° 47′
d	145° 20′		58° 24′	107°

3 Se dan tres conjuntos ordenados de puntos:

$\{a, b, c, d\}$; $\{m, n, p, q\}$ y $\{r, s, t, u\}$.

a) Únelos en el orden dado y obtendrás distintos cuadriláteros.



b) ¿En cuál de estos cuadriláteros se verifica que la recta determinada por cada par de vértices consecutivos deja a los demás en el mismo semiplano?

c) ¿El cuadrángulo que cumple esta condición es convexo o cóncavo?

4 a) a, b, c y d son cuatro puntos ordenados tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados y la recta determinada por cada par de puntos consecutivos deja a los demás en un mismo semiplano. Únelos en el orden dado.

b) ¿Qué clase de cuadrángulo obtienes?

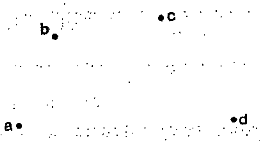
c) Has visto que todo cuadrángulo convexo puede definirse como la intersección de los cuatro ángulos interiores. ¿Podemos obtener el cuadrángulo abcd como intersección de dos ángulos? Escribe V o F.

$\widehat{abc} \cap \widehat{bcd} = abcd$

$\widehat{abc} \cap \widehat{cda} = abcd$

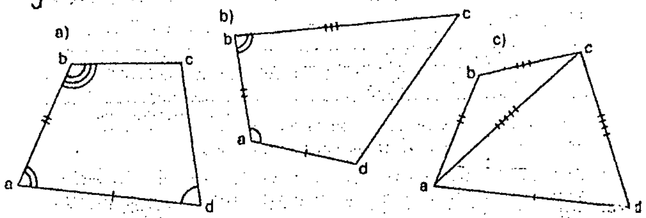
$\widehat{bcd} \cap \widehat{cda} = abcd$

$\widehat{bcd} \cap \widehat{dab} = abcd$



d) Completa: El cuadrángulo convexo abcd puede considerarse como la intersección de dos ángulos interiores cuyos vértices ....

5 Construye un cuadrilátero congruente al dado utilizando los datos marcados.



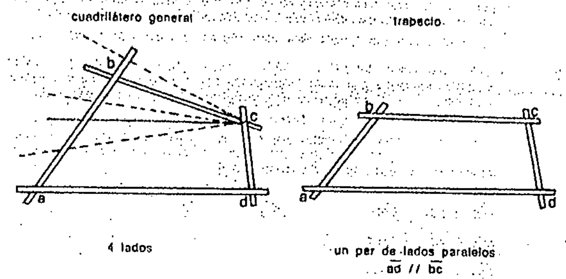
II Clasificación de los cuadriláteros convexos

A partir de un cuadrilátero general al que sólo imponemos como condición "tener cuatro lados" se generan cuadriláteros especiales aplicando sucesivas transformaciones.

En la medida que se imponen más condiciones, se obtienen cuadriláteros más particulares.

Para analizar estas transformaciones es conveniente que utilices varillas articuladas.

1. Partimos de un cuadrilátero general.



Con centro en un vértice cualquiera se hace girar uno de los lados manteniendo fijos los otros tres. En la figura gira el lado $\overline{bc}$ con centro en c.

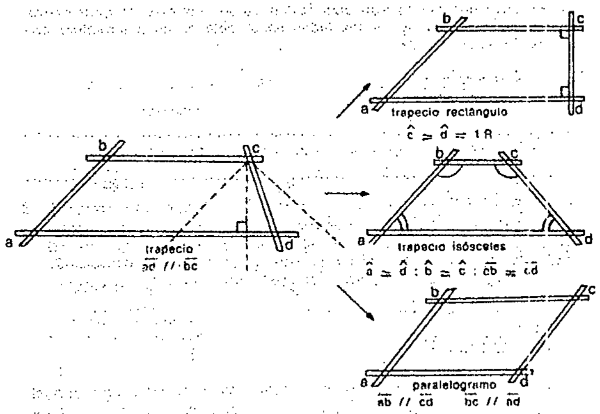
Se genera una familia de cuadriláteros con un par de lados paralelos ($\overline{ad} \parallel \overline{bc}$).

Se llama **trapecio** a todo cuadrilátero que tiene **por lo menos** un par de lados paralelos.

Los lados paralelos se llaman **bases** del trapecio.

$\overline{ad} \parallel \overline{bc}$ ∴ $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$ bases del trapecio abcd.

2. Si en el trapecio hacemos girar uno de los lados no paralelos se genera una familia de trapecios en la que aparecen tres casos especiales.



Todo trapecio que tiene dos ángulos rectos se llama **trapecio rectángulo.**

$\hat{c} \cong \hat{d} = 1$ R $\overline{cd} \perp \overline{ad}$ y $\overline{cd} \perp \overline{bc}$

Todo trapecio cuyos ángulos adyacentes a las bases son congruentes y los otros dos lados son congruentes, se llama **trapecio isósceles.**

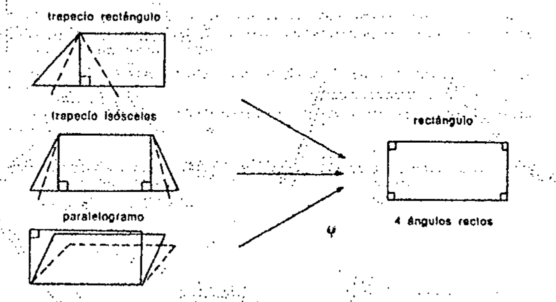
$\hat{a} \cong \hat{d}$ ($\hat{a}$ y $\hat{d}$ adyacentes a $\overline{ad}$) ; $\hat{b} \cong \hat{c}$ ($\hat{b}$ y $\hat{c}$ adyacentes a $\overline{bc}$)
$\overline{ad}$ y $\overline{bc}$ bases ; $\overline{ab} \cong \overline{cd}$ (lados distintos de las bases).

Todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos se llama **paralelogramo.**

$\overline{ab} \parallel \overline{cd}$ y $\overline{bc} \parallel \overline{ad}$

El paralelogramo es un trapecio particular en el que pueden considerarse como bases cualquiera de los pares de lados paralelos.

3. En cada uno de los trapecios obtenidos se puede hacer girar convenientemente alguno de los lados hasta obtener un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.



En el **trapecio rectángulo** se hace girar el lado $\overline{ab}$ con centro en cualquiera de sus extremos hasta lograr que $\overline{ab} \perp \overline{ad}$ o sea $\hat{a} \cong \hat{b} = 1$ R.

En el **trapecio isósceles** se hacen girar los lados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ con centro en cualquiera de sus extremos hasta lograr que $\overline{ab} \perp \overline{ad}$ y $\overline{cd} \perp \overline{ad}$. Entonces $\hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c} \cong \hat{d} = 1$ R.

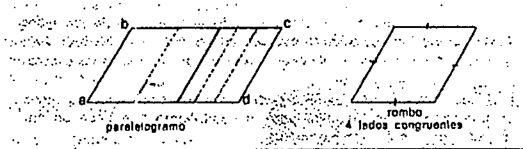
En el **paralelogramo** se mantiene fija la base ad y se hacen girar los lados ab y dc con centro en a y en d. Los ángulos de la base varían de 0° a 180°, tal que: $\hat{a} + \hat{d} = 180°$. En un instante de la transformación se logra que $\hat{a} \cong \hat{d} = 1$ R. Entonces $\hat{b} \cong \hat{c} = 1$ R.

En todos los casos se ha logrado obtener, en la familia de trapecios o en la de paralelogramos, un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

Todo cuadrilátero que tiene sus ángulos rectos se llama **rectángulo.**

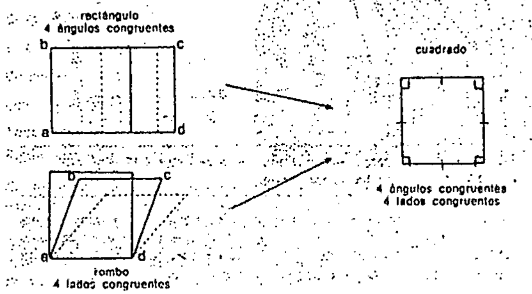
El rectángulo es paralelogramo y es trapecio rectángulo isósceles.

4. Si en el paralelogramo abcd trasladamos el lado $\overline{cd}$ manteniéndolo paralelo a $\overline{ab}$ y tal que sus extremos se deslicen sobre las rectas de los otros dos lados se obtiene una familia de paralelogramos entre los cuales figura un paralelogramo con los cuatro lados congruentes.



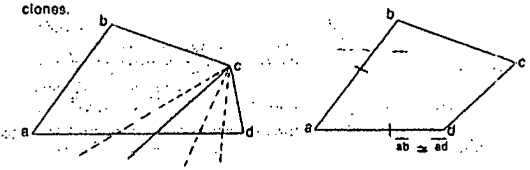
Todo cuadrilátero que tiene sus lados congruentes se llama rombo.

5. Si en el rectángulo y en el rombo realizamos transformaciones similares a las que hicimos con el paralelogramo se genera una familia de rectángulos en la que aparece un rectángulo con cuatro lados congruentes y una familia de rombos en la que figura un rombo con cuatro ángulos congruentes (ángulos rectos).



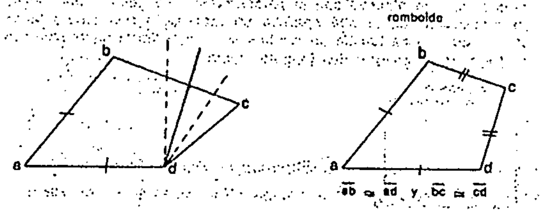
Todo cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos congruentes se llama cuadrado.

6. Volvamos al cuadrilátero de partida para realizar nuevas transformaciones.



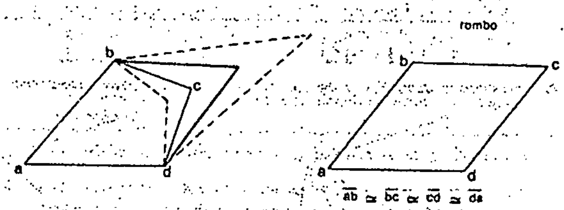
Con centro en uno de los vértices se hace girar uno de los lados hasta obtener un cuadrilátero con un par de lados consecutivos congruentes. En la figura se hizo girar el lado $\overline{cd}$ con centro en c hasta lograr que $\overline{ab} \simeq \overline{ad}$.
Este cuadrilátero no figura en las clasificaciones comunes. Sugerimos el nombre de **semirromboide** para el cuadrilátero que tiene un par de lados consecutivos congruentes.

7. Si en el semirromboide hacemos girar el lado $\overline{cd}$ con centro d, se genera una familia de cuadriláteros en los que aparece como caso particular un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos congruentes.



Todo cuadrilátero que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes se llama romboide.

8. Girando convenientemente un par de lados consecutivos congruentes se genera una familia de romboides en la que aparece como caso particular un romboide con los cuatro lados congruentes. En la figura se hacen girar los lados $\overline{bc}$ con centro b y $\overline{dc}$ con centro c.



El cuadrilátero obtenido es el rombo. Finalmente el rombo se transforma en cuadrado.

Podemos sintetizar en un cuadro las transformaciones realizadas. (Ver cuadro pág. 250)
Notarás que cada nueva clase de cuadriláteros que se obtiene está incluida en cada una de las que le anteceden en el cuadro, siguiendo el orden de las flechas.

Así, por ejemplo:

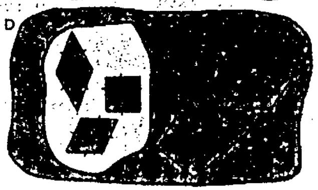
Si A = {paralelogramos}

y B = {trapecios}

Entonces: A ⊂ B

Esto significa que:

Todo paralelogramo es trapecio.
Algún trapecio es paralelogramo.



Si C = {rombos}

y D = {romboides}

Entonces: C ⊂ D

Esto significa que:

Todo rombo es romboide.
Algún romboide es rombo.

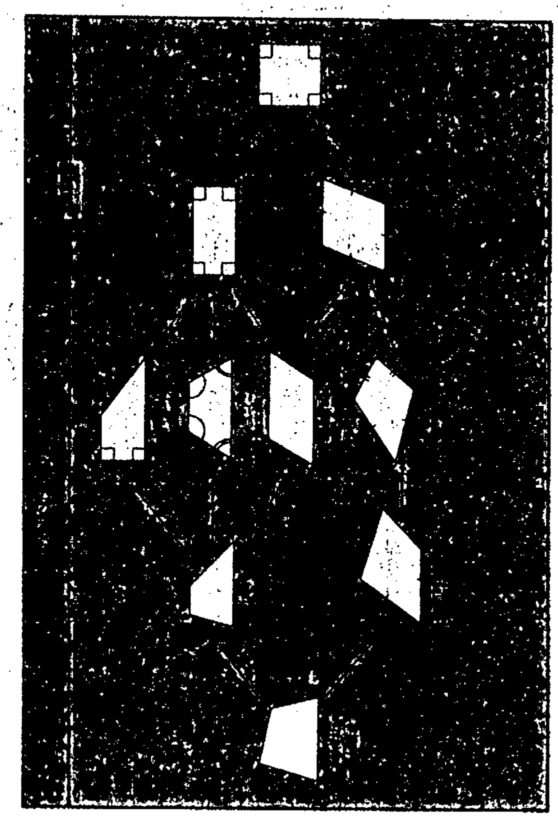
De acuerdo con la relación de inclusión, cada clase de cuadriláteros posee todas las propiedades de las clases que le anteceden y adquiere propiedades nuevas que lo caracterizan.
Según estas observaciones debes tener en cuenta que cada vez que demuestres una propiedad para una clase de cuadriláteros, dicha propiedad es válida para todas las clases incluidas en la primera.

EJERCICIOS

6 a) ¿Qué clase de cuadriláteros son equiláteros?
b) ¿Qué clase de cuadriláteros son equiángulos?
c) ¿Cuáles son equiláteros y equiángulos?

7 Completa:
a) Si un rectángulo es rombo, entonces es ....
b) Si un paralelogramo es romboide entonces es ....

8 Representa en diagramas:
A = {rectángulos}   B = {rombos} $\mathcal{U}$ = {cuadriláteros}
a) Define por propiedad A ∩ B ; A — B ; B — A.
b) Dibuja un cuadrilátero en cada región del diagrama.



9 Dado el conjunto: $\mathcal{C} = \{A, B, C, D, E\}$

Siendo $A = \{\text{romboides}\}$ $B = \{\text{paralelogramos}\}$ $C = \{\text{rectángulos}\}$

$D = \{\text{rombos}\}$ $E = \{\text{cuadrados}\}$

Considera en $\mathcal{C}$ la relación $\subset$ que es un orden.

a) Dibuja el diagrama de la relación "$\subset$" en $\mathcal{C}$.

b) ¿El orden es estricto o amplio?

c) ¿El orden es total o parcial?

d) Según corresponda, ordena total o parcialmente los elementos del conjunto.

III Propiedades de los lados y de los ángulos

En las transformaciones realizadas con cuatro varillas determinaste las propiedades de los lados y de los ángulos, que sirvieron para definir las distintas clases de cuadriláteros.

Además de estas propiedades se cumplen otras que trataremos de verificar y demostrar. En casi todas las propiedades relativas a los cuadriláteros hay que demostrar la congruencia de segmentos o de ángulos. Para ello tenemos que recurrir a la comparación de triángulos puesto que es el único polígono rígido. En consecuencia, tendrás que determinar, en cada caso, cuáles son los triángulos que conviene comparar, de acuerdo con los datos que poseas y la conclusión a la que quieres llegar.

Te mostraremos algunas demostraciones como modelo y te propondremos otras como ejercicio. El propósito no es el de memorizar demostraciones sino el de saber encontrar el camino para lograrlo.

Veamos, pues, cuáles son las propiedades de los lados y de los ángulos en los distintos tipos de cuadriláteros.

Trapecio

Por definición:

Todo trapecio tiene un par de lados paralelos.

Trapecio rectángulo

Cumple la propiedad del trapecio y además por definición:

Todo trapecio rectángulo tiene un par de ángulos rectos.

Trapecio isósceles

Cumple la propiedad de los trapecios y además por definición:

1. Los lados distintos de las bases son congruentes.

2. Los ángulos adyacentes a cada base son congruentes.

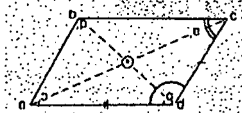
Paralelogramo

Cumple la propiedad de los trapecios y además por definición:

En todo paralelogramo los lados opuestos son paralelos.

Verificamos para el paralelogramo nuevas propiedades.
Recorta dos paralelogramos congruentes de papel.

Marca el punto de intersección de las diagonales. Coloca en este punto un broche de presión que sujete a los dos paralelogramos de modo que queden totalmente superpuestos.



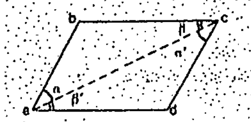
Con centro en el punto de intersección de las diagonales giramos media vuelta (180°) el paralelogramo a'b'c'd'.

Comprobarás que:
Cada lado es congruente a su opuesto y cada ángulo es congruente a su opuesto.

En consecuencia enunciamos las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 1. En todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes.

PROPIEDAD 2. En todo paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes.



H

abcd paralelogramo
$\Rightarrow \overline{ab} \,//\, \overline{cd}$
y $\overline{bc} \,//\, \overline{ad}$

T

1. $\overline{ab} \cong \overline{cd}$ y $\overline{bc} \cong \overline{ad}$
2. $\hat{a} \cong \hat{c}$ y $\hat{b} \cong \hat{d}$

D.

De acuerdo con la primera parte de la tesis conviene comparar el triángulo que tiene por lados $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ (primeros miembros) con el triángulo que tiene por lados $\overline{cd}$ y $\overline{ad}$ (segundos miembros). En consecuencia trazamos la diagonal $\overline{ac}$.

Comparamos $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{cda}$ $\left\{\begin{array}{l} \overline{ac} \cong \overline{ac} \text{ propiedad reflexiva} \\ \hat{\alpha} \cong \hat{\alpha}' \text{ alt. int. entre } \overline{ab} \parallel \overline{cd} \text{ y secante } \overline{ac} \\ \hat{\beta} \cong \hat{\beta}' \text{ alt. int. entre } \overline{bc} \parallel \overline{ad} \text{ y secante } \overline{ac} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{cda}$ (A.L.A)

$\boxed{\overline{ab} \cong \overline{cd} \text{ y } \overline{bc} \cong \overline{ad}}$ (1) y $\boxed{\hat{b} \cong \hat{d}}$ (2)

Trazando la diagonal $\overline{bd}$ y comparando el par de triángulos determinados demostramos que: $\boxed{\hat{a} \cong \hat{c}}$ (3)

Con las relaciones (1), (2) y (3) queda demostrada la tesis.

Propiedades recíprocas

Observa: Sabiendo que los lados opuestos son paralelos hemos demostrado que los lados opuestos son congruentes y que los ángulos opuestos son congruentes.

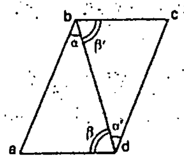
Recíprocamente, sabiendo que los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes o que los ángulos opuestos son congruentes podemos demostrar que los lados opuestos son paralelos.

Para demostrar el paralelismo de lados usamos las propiedades de los ángulos formados por dos rectas cortadas por una tercera.

En consecuencia enunciamos las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 3. (Recíproca de la propiedad 1.)
Si un cuadrilátero tiene los lados opuestos congruentes es un paralelogramo.

H	T
$\overline{ab} \cong \overline{cd}$ $\overline{bc} \cong \overline{ad}$	abcd paralelogramo



Trazamos una cualquiera de las diagonales; por ejemplo: $\overline{bd}$.

Comparamos $\overset{\triangle}{abd}$ y $\overset{\triangle}{bcd}$ $\left\{\begin{array}{ll} \overline{bd} \cong \overline{bd} & \text{propiedad reflexiva} \\ \overline{ab} \cong \overline{cd} & \\ \overline{bc} \cong \overline{ad} & \end{array}\right.$ por hipótesis

$\overset{\triangle}{abd} \cong \overset{\triangle}{bcd}$ (L.L.L)

Entonces los ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes.

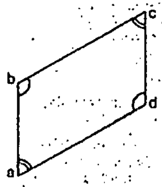
$\hat{\alpha} \cong \hat{\alpha}'$ alt. internos entre $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$; secante $\overline{bd} \Rightarrow \boxed{\overline{ab} \parallel \overline{cd}}$

$\hat{\beta} \cong \hat{\beta}'$ alt. internos entre $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$; secante $\overline{bd} \Rightarrow \boxed{\overline{bc} \parallel \overline{ad}}$

En consecuencia, abcd es un paralelogramo.

PROPIEDAD 4. (Recíproca de la propiedad 2.)
Si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos congruentes es un paralelogramo.

H	T
$\hat{a} \cong \hat{c}$ $\hat{b} \cong \hat{d}$	abcd es paralelogramo



D.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 4R$ propiedad de los ángulos internos de un cuadrilátero

$\hat{a} \cong \hat{c}$ y $\hat{b} \cong \hat{d}$ por hipótesis

Reemplazando y asociando:

$(\hat{a} + \hat{b}) + (\hat{a} + \hat{b}) = 4R$

$2(\hat{a} + \hat{b}) = 4R$

$\hat{a} + \hat{b} = 2R$

Los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son conjugados y suplementarios. En consecuencia las rectas bc y ad que los determinan con la transversal ab son paralelas.

Entonces $bc \parallel ad$ (1)

Análogamente se demuestra que $ab \parallel cd$ (2)

De las relaciones (1) y (2) se deduce que abcd es un paralelogramo.

De acuerdo con las propiedades enunciadas se puede demostrar que un cuadrilátero es un paralelogramo si tiene:

- dos pares de lados paralelos
- o dos pares de lados congruentes.

Pero si consideramos un solo par de lados, entonces hay que demostrar que cumple las dos condiciones: paralelismo y congruencia.

Dibuja dos segmentos congruentes y paralelos: $\overline{ab} \mathbin{/\!\!\!\!\cong} \overline{cd}$. Une a con c y b con d.

El cuadrilátero obtenido es un paralelogramo.

EJERCICIO

10 Demuestra lo siguiente:

PROPIEDAD 5. Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos congruentes y paralelos, es un paralelogramo.

Sugerencia: Traza una diagonal y compara los triángulos determinados.

Romboide

Por definición:

Todo romboide tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.

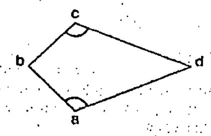
Además:

Todo romboide tiene un par de ángulos opuestos congruentes.

EJERCICIO

11 Demuestra que en el romboide abcd es:

$\hat{a} \cong \hat{c}$



Rectángulo

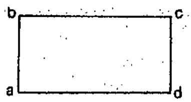
El rectángulo cumple las propiedades enunciadas para los trapecios y los paralelogramos y además, por definición:

Todo rectángulo tiene sus ángulos congruentes.

EJERCICIO

12 Demuestra lo siguiente:

PROPIEDAD. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto es un rectángulo.



H	T
abcd paralelogramo	abcd rectángulo, o sea:
$\hat{a} \cong 1R$	$\hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c} \cong \hat{d}$

Rombo

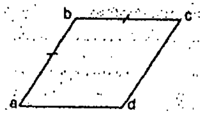
El rombo es paralelogramo y es romboide. En consecuencia cumple todas las propiedades enunciadas para estos cuadriláteros.
Además, por definición:

Todo rombo tiene sus lados congruentes.

EJERCICIO

13 Demuestra lo siguiente:

PROPIEDAD. Si un paralelogramo tiene un par de lados consecutivos congruentes, es un rombo.



H	T
abcd paralelogramo	abcd rombo, o sea:
$\overline{ab} \cong \overline{bc}$	$\overline{ab} \cong bc \cong cd \cong da$

Cuadrado

El cuadrado cumple todas las propiedades de los lados y de los ángulos enunciadas para las distintas clases de cuadriláteros pues está incluido en todas ellas.

Los cuadros de las páginas 258 y 259 te muestran las propiedades de los ángulos y de los lados de los cuadriláteros.

EJERCICIOS

14 ¿Cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para asegurar que un cuadrilátero es un trapecio rectángulo?

a) Si un cuadrilátero tiene dos ángulos rectos es un trapecio rectángulo.

b) Si un cuadrilátero tiene dos ángulos consecutivos rectos es un trapecio rectángulo.

c) Si un trapecio tiene un ángulo recto es un trapecio rectángulo.

d) Si un trapecio tiene dos ángulos consecutivos congruentes es un trapecio rectángulo.

Observación: Llamamos ángulos consecutivos de un polígono a los ángulos interiores correspondientes a vértices consecutivos.

15 Dibuja un romboide cuyos ángulos congruentes sean:

a) agudos b) rectos c) obtusos

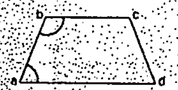
16 ¿En qué clase de cuadriláteros puedes aplicar cada una de las siguientes fórmulas para calcular el perímetro?

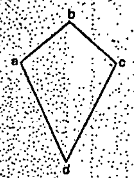
a) $Per = 2\,L_1 + 2\,L_2 = 2\,(L_1 + L_2)$ b) $Per = 4\,L$

17 El perímetro de un trapecio isósceles es de 108 cm. Cada uno de los lados congruentes vale 23 cm. La base mayor supera en 8 cm a la menor. Calcula las bases del trapecio.

18 De acuerdo con los datos calcula los ángulos del trapecio isósceles.

Datos $\begin{cases} \hat{a} = x + 12^\circ \\ \hat{b} = x + 28^\circ \end{cases}$



19 

Datos

abcd romboide

Per. abcd = 30 cm

$\overline{ab} = x$

$\overline{ad} = 2x - 3$ cm

Calcula el valor de cada lado.

20 Datos

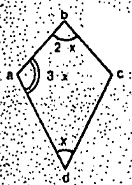
abcd romboide

$\hat{a} = 3x$

$\hat{b} = 2x$

$\hat{d} = x$

Calcule el valor de cada ángulo.

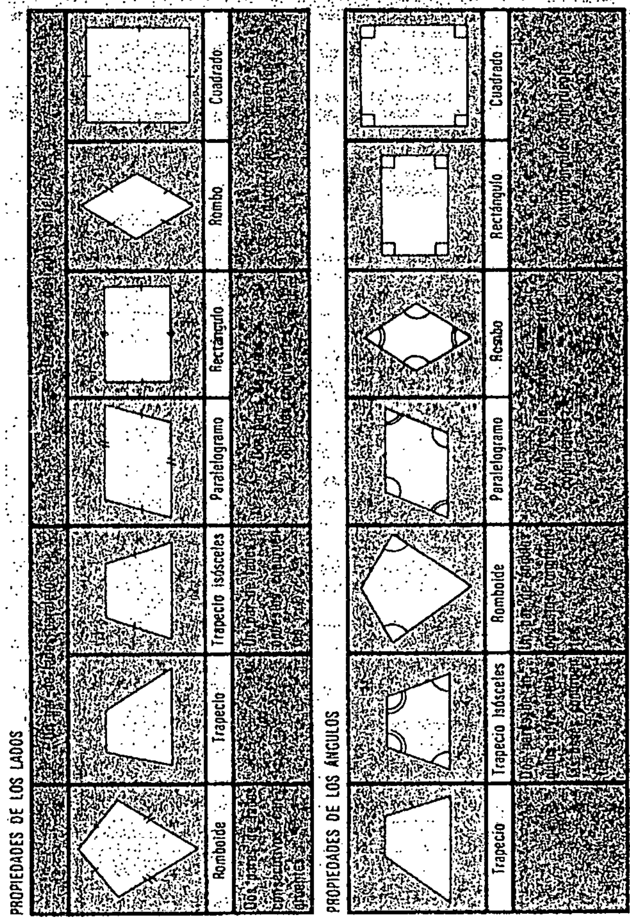


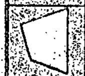
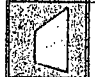
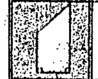
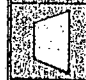
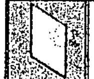
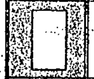
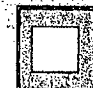
21 

Datos: abcd paralelogramo

$\hat{a} = 48^\circ\, 20'$

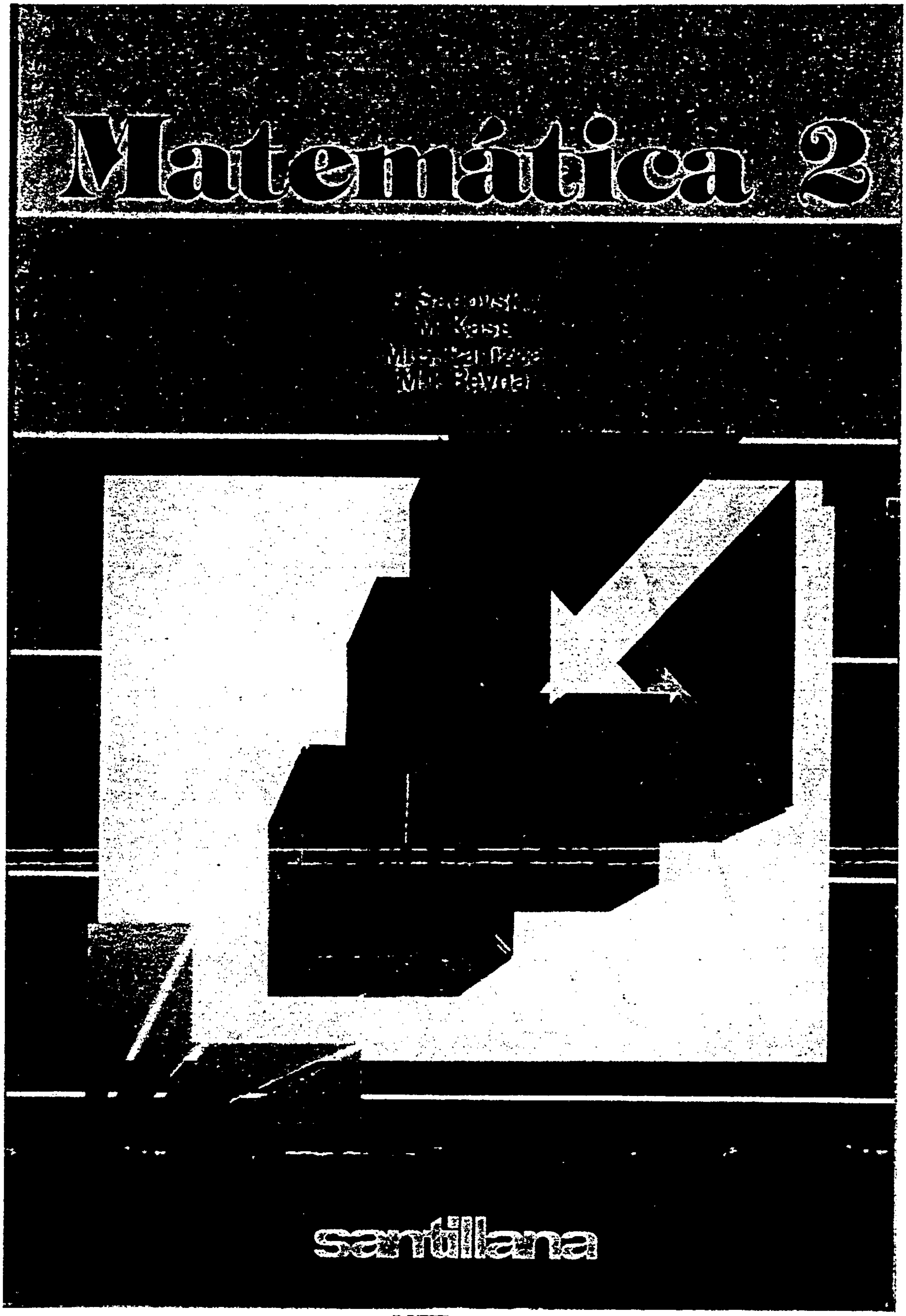
Calcula: $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\hat{d}$.



		PROPIEDADES									
LADOS	1	Un par de lados paralelos			●	●	●	●	●	●	●
	2	Dos pares de lados paralelos						●	●	●	●
	3	Dos pares de lados opuestos congruentes						●	●	●	●
	4	Dos pares de lados consecutivos congruentes		●						●	●
	5	Cuatro lados congruentes								●	●
ANGULOS	6	Un par de ángulos opuestos congruentes		●				●	●	●	●
	7	Dos pares de ángulos opuestos congruentes						●	●	●	●
	8	Un par de ángulos adyacentes congruentes				●	●		●		●
	9	Dos pares de ángulos adyacentes congruentes					●			●	●
	10	Cuatro ángulos congruentes							●		●

259

LXII



LXIII

ÍNDICE

11

LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA

Un caso de identidad

(Adaptación del cuento de Sir Arthur Conan Doyle)

Me encontraba plácidamente conversando con Sherlock Holmes en sus habitaciones de Baker Street. De repente unos golpes en la puerta interrumpieron nuestra charla y entró el botones para anunciar a la señorita Mary Sutherland.

Sherlock Holmes la acogió con la espontánea amabilidad que lo distinguía. Una vez cerrada la puerta y después de indicarle con una inclinación que se sentase en un sillón, la contempló de la manera minuciosa, y sin embargo discreta, que era peculiar en él.

—¿No le parece —le dijo Holmes— que es un poco molesto para una persona corta de vista como usted el escribir tanto a máquina?

—Lo fue al principio —contestó ella—, pero ahora sé dónde están las letras sin necesidad de mirar.

De pronto, dándose cuenta de todo el alcance de las palabras del señor Holmes...

—¡Usted ha oído hablar de mí, señor Holmes! —exclamó—. De otro modo, ¿cómo podría saber que escribo a máquina y soy corta de vista?

—No le dé importancia —le dijo Holmes, riéndose—. Éste no es más que otro caso de observación y deducción. ¿Cuál es el motivo de su consulta?

—¡Ay, señor Holmes, si usted pudiera ayudarme! No soy rica, pero dispongo de un centenar de libras al año de renta propia, además de lo que gano con la máquina de escribir, y daría todo ello por saber qué ha sido de mi prometido el señor Hosmer Angel, quien ha desaparecido justo antes de concretarse nuestra boda. Vine porque me irritó el ver la tranquilidad con que lo tomaba todo el señor Windibank, es decir, mi padre.

—¿Su padre? —dijo Holmes—. Se referirá a su padrastro, puesto que los apellidos son distintos.

—Sí, es mi padrastro. Lo llamo padre, aunque suena a cosa rara, porque sólo me lleva cinco años y dos meses de edad.

—¿Vive su madre?

—Sí, mi madre vive y está bien. No me gustó mucho, señor Holmes, cuando ella contrajo matrimonio, muy poco después de morir papá, y lo contrajo con un hombre casi quince años más joven que ella.

—¿Heredó de su padre la renta que usted disfruta? —preguntó Holmes.

—De ninguna manera, señor, se trata de algo en absoluto independiente. Es un capital que asciende a dos mil quinientas libras, pero sólo puedo cobrar los intereses.

—Lo que usted me dice me resulta en extremo interesante —le dijo Holmes—. Disponiendo de una suma tan importante como son cien libras al año, además de lo que usted misma gana, viajará, sin duda, un poco y se concederá toda clase de caprichos.

—No, señor Holmes, mientras viva en casa, no deseo ser una carga para ellos, y es mi padrastro quien maneja mi dinero.

—Bien —dijo Holmes—, tenga, pues, la bondad de contarnos

todo lo que se refiera a sus relaciones con el señor Hosmer Angel.

—A pesar de que mi padre me negaba permanentemente los permisos de salida, me rebelé un día y decidí ir a una fiesta. Allí me presentaron a Hosmer Angel, con el que simpaticé inmediatamente.

—¿Y después del baile, qué fue del señor Hosmer Angel?

—Pues verá: mi padre, que viaja habitualmente por cuestiones de trabajo, iba a marcharse a Francia una semana más tarde, y Hosmer me escribió varias cartas en las que declaraba su amor hacia mí. Además, me decía que sería mejor y más seguro que no nos viésemos hasta que mi padre hubiese emprendido el viaje. Después del primer paseo que dimos juntos nos comprometimos y decidimos concretar la boda antes del regreso de mi padre.

—¿Y no tiene usted su dirección?

—No.

—¿No recuerda usted algunas otras pequeñeces referentes al señor Hosmer Angel?

—Era un hombre muy vergonzoso, señor Holmes. Prefería pasearse conmigo ya oscurecido, y no durante el día. Llevaba patillas y bigotes. También tenía una manera de hablar vacilante, como si se expresara cuchicheando. Padecía, lo mismo que yo, debilidad de la vista, y usaba cristales oscuros para defenderse de la luz. Medía aproximadamente 1,75 m., era de contextura fuerte, de tez morena y tenía cabello oscuro con una pequeña calvicie en el centro.

—De modo que su boda quedó fijada. ¿Iba a celebrarse en la iglesia? —preguntó Holmes.

—Sí, señor. El día de la boda, antes de salir hacia la iglesia, Hosmer Angel me hizo jurarle que ocurriese lo que ocurriese le sería siempre fiel. Luego partimos en dos coches: mi madre y yo en uno y mi prometido en el otro. Nosotras fuimos las primeras en llegar a la iglesia, y cuando lo hizo su coche, esperábamos que Hosmer se bajaría del mismo; pero no lo hizo y cuando el cochero abrió la puerta, ¡allí no había nadie!

La joven sollozaba.

—Gracias —dijo Holmes—. Me ha expuesto usted su problema con gran claridad. Deje aquí las cartas que Angel le envió.

Ella depositó encima de la mesa los papeles y siguió su camino con la promesa de presentarse siempre que la llamase el señor Holmes.

—Por el amor de Dios, explíqueme usted cómo supo que la señorita Sutherland es dactilógrafa y corta de vista —pregunté a mi amigo.

—Amigo, lo primero que yo miro son las mangas de una mujer. La doble línea, un poco más arriba de la muñeca, en el sitio donde la mecanógrafa hace presión contra la mesa, estaba perfectamente marcada.

—¿No podrían ser, acaso, las marcas producidas por el trabajo frente a una máquina de coser? —repliqué a mi amigo.

—No, porque si se tratara de una máquina de coser, sólo tendría marcas en el brazo izquierdo y no es éste el caso —contestó Holmes.

—¿Y cómo se dio cuenta de que es corta de vista? —insistí.

—Miré su cara y descubrí en ambos lados de su nariz la señal de anteojos, todo lo cual me permitió aventurar mi observación sobre la cortedad de vista.

Luego, Holmes agregó: —Por lo que hace a las cartas de Hosmer Angel —dijo, pasándoles la vista por encima—, son de lo más vulgar. No existe en ellas pista alguna que nos conduzca al señor Angel. Sin embargo, hay un detalle notable y que no dudo le sorprenderá a usted.

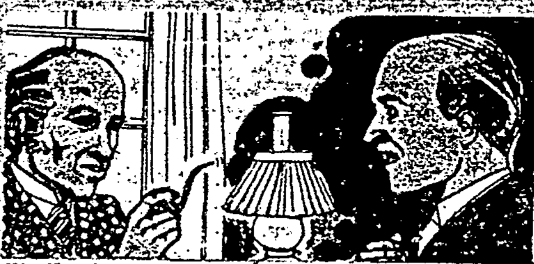
—Que están escritas a máquina —hice notar yo.

—No sólo eso, sino que incluso lo está la firma. Voy a escribir dos cartas que nos sacarán de dudas a ese respecto. La una para cierta firma comercial de la City cuyos empleados viajan al exterior y la otra al padrastro de esa señorita, el señor Windibank.

A los pocos días, conversando con Holmes, oímos fuertes pisadas en el pasillo.

—Ahí tenemos al padrastro de la joven, el señor Windibank —dijo Holmes—. Me escribió una carta diciéndome que estaría aquí a las seis... ¡Adelante!

El señor Windibank entró y se instaló en un sillón. Holmes fue directamente al tema.



—Pues bien, señor Windibank, fíjese en que se da el caso, en esta carta suya, de que todas las letras "e" son algo borrosas y que en el ganchito de la letra "erre" hay un ligero defecto. Tiene su carta otras catorce características, pero estas dos son las más evidentes. Yo tengo aquí otras cuatro cartas que según parece proceden del hombre que buscamos. Todas ellas están escritas a máquina, y en todas ellas se observa no solamente que las "ees" son borrosas y las "erres" sin ganchito, sino que tienen también, si uno se sirve de las lentes de aumento, las otras catorce características a las que me he referido. Señor Windibank, usted las escribió. Está atrapado.

Windibank dio un salto en su asiento, y pálido, respondió:

—Esto no es un delito.

—Es cierto; pero, entre nosotros, Windibank, ha sido una artimaña cruel, egoísta y despiadada, que usted llevó a cabo de un modo tan ruin como yo jamás he conocido. Aunque no se lo puede castigar por ello. Usted se casó con una mujer mucho más vieja: lo hizo por su dinero y, además, disfrutaba del dinero de la hija mientras ésta vivía con ustedes. Esta última cantidad era de importancia para gentes de su posición, y el perderla habría equivalido a una diferencia notable. Valía la pena realizar un esfuerzo para conservarla. ¿Qué hace entonces su hábil padrastro? Concibe un plan que hace más honor a su cabeza que a su corazón. Se disfrazó, se cubrió sus ojos de aguda mirada con cristales de color, enmascaró su rostro con un bigote y un par de hirsutas patillas, rebajó el timbre de su voz hasta convertirlo en cuchicheo insinuante y, doblemente seguro porque la muchacha era corta de vista, se presentó bajo el nombre de señor Hosmer Angel y alejó a los demás pretendientes, haciéndole la corte él mismo.

Windibank se levantó y sin decir palabra, salió dando un portazo.

Luego de un instante de silencio, le pregunté a Holmes:

—¿Cuáles fueron las etapas de su razonamiento y cómo se las arregló para comprobar que Angel era Windibank?

Demostrando la culpabilidad de Windibank

A partir de la conversación con la joven, dijo Holmes, pude establecer algunas conjeturas:

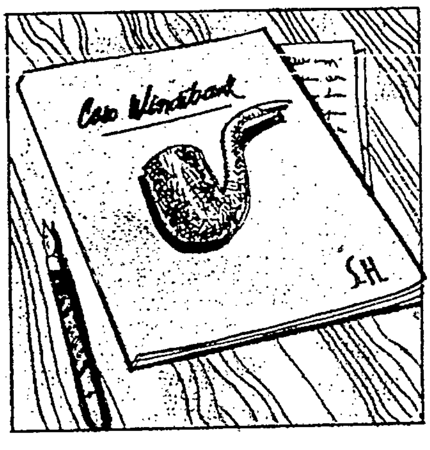
- El señor Hosmer Angel tenía una extraña conducta. Su vestimenta, su manera de hablar, el uso de cristales oscuros, patillas y bigotes, me hicieron pensar en una persona disfrazada.
- El padrastro manejaba el dinero de la señorita Sutherland. Si la joven no se casaba, el señor Windibank saldría beneficiado.
- El señor Hosmer Angel firmaba a máquina sus cartas, como si no deseara que su letra fuera reconocida.
- Hosmer Angel y el padrastro nunca coincidían en un mismo lugar.

Considerando estos elementos, encontré sospechoso al señor Windibank. Entonces escribí a la empresa W y M en la que él trabaja, preguntando si alguno de sus viajantes respondía a los rasgos de Hosmer Angel que había descripto la señorita Sutherland. Me preocupé por eliminar todos los elementos de la descripción que yo consideraba parte del disfraz.

Me había ya fijado en las características de la máquina de escribir y envié una carta a Windibank, citándolo. En su respuesta, escrita a máquina, se advertían las mismas particularidades que aparecían en las cartas de Hosmer Angel. Finalmente, la respuesta de la empresa W y M aportó el último elemento a mi demostración: la descripción correspondía en todos sus detalles a la de su empleado James Windibank.

¿Y en matemática...?

Si revisamos la demostración anterior, vemos que Sherlock Holmes encadena convenientemente ciertos **datos** y obtiene una **conclusión** que resuelve su problema.



A partir de algunos indicios Sherlock Holmes sospechó de Windibank y **demostró** su culpabilidad.
¿Por qué decimos que demostró su culpabilidad?
Porque ofreció un **fundamento** seguro para la conclusión obtenida. Dicho de otra forma, Sherlock pudo **deducir** que el padrastro era la misma persona que Hosmer Angel.

A la manera de Sherlock Holmes, los matemáticos resuelven muchos de sus problemas utilizando el razonamiento deductivo, es decir, aquél en el que a partir de los datos y, utilizando las leyes de la lógica, se ofrece una evidencia de la verdad de la conclusión.
Por eso nos parece importante que empecemos a entender el significado de algunos términos: demostrar, razonar, deducir...

Sacando conclusiones

En los últimos 15 días, Oscar, el preceptor de 2° C, ha tomado lista después del primer recreo.

Por eso, Juan no se preocupó al darse cuenta de que llegaría tarde al colegio.

— Menos mal que ahora es suficiente con llegar antes del primer recreo para no tener tarde —se dijo.

La conclusión de Juan se basaba en la observación de lo sucedido en los últimos 15 días.

Esta forma de obtener conclusiones, basada en la observación de cierto número de casos, responde a un esquema de **razonamiento inductivo.**

Pero Juan fue demasiado apresurado. Hubiera sido más prudente de su parte decir, por ejemplo: "Es probable que no me pongan tarde si llego antes del primer recreo".

Si bien el razonamiento inductivo no siempre lleva a conclusiones exactas, la inducción es un camino válido para descubrir posibles propiedades.

Así, cuando observamos que algún hecho se reitera en un número importante de casos, tenemos derecho a sospechar que se trata de una ley general.

¿Y luego? Luego... o demostramos la ley o encontramos un ejemplo que la contradiga.

Encontrando argumentos

Supongamos que queremos convencer a alguien de que el cuadrado de un número natural menor que 10 es siempre menor que 100.

Nuestro interlocutor quedará satisfecho si consideramos cada uno de los números (0, 1, ..., 9), lo elevamos al cuadrado y verificamos que el resultado es menor que 100. ¿Podemos hacer algo similar si se trata de demostrar que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°?

Por más que inspeccionemos una gran cantidad de triángulos, diez, cien, mil, nadie nos garantiza que no surja algún triángulo no considerado que venga a contrariar lo que estamos afirmando.

Para demostrar que una propiedad es válida para todos los elementos de un conjunto infinito, hay que razonar considerando un elemento genérico arbitrario y nunca un caso particular.

Ahora te invitamos a leer el relato de Beremiz, aquel famoso y legendario calculador árabe, el cual te ayudará a comprender el porqué de la afirmación anterior.

EL RELATO DE BEREMIZ

¿Es posible extraer en matemática una regla falsa de una propiedad verdadera para algunos casos? Quiero oír tu respuesta, ¡oh Calculador!, ilustrada con un ejemplo sencillo y perfecto.

Beremiz calló, durante un rato, reflexivamente. Luego salió del recogimiento y dijo:

Admitamos que un algebrista curioso deseara determinar la raíz cuadrada de un número de cuatro cifras. Sabemos que la raíz cuadrada de un número es otro número que, multiplicado por sí mismo, da un producto igual al número dado.

Vamos a suponer aún que el algebrista, tomando libremente tres números a su gusto, destacase los siguientes números: 2025, 3025 y 9801.

Iniciemos la resolución del problema por el número 2025. Hechos los cálculos para dicho número, el investigador hallaría que la raíz cuadrada es igual a 45. En efecto: 45 veces 45 es igual a 2025. Pero se puede comprobar que 45 se obtiene de la suma de 20 + 25, que son partes del número 2025 descompuesto mediante un punto, de esta manera: 20 . 25.

Lo mismo podría comprobar el matemático con relación al número 3025, cuya raíz cuadrada es 55 y conviene notar que 55 es la suma de 30 + 25, partes ambas del número 3025.

Idéntica propiedad se destaca con relación al número 9801, cuya raíz cuadrada es 99, es decir 98 + 01.

Ante estos tres casos, el inadvertido algebrista podría sentirse inclinado a enunciar la siguiente regla:

"Para calcular la raíz cuadrada de un número de cuatro cifras, se divide el número por medio de un punto en dos partes de dos cifras cada una, y se suman las partes así formadas. La suma obtenida será la raíz cuadrada del número dado".

Esa regla, visiblemente errónea, fue inducida de tres ejemplos verdaderos. Es posible en matemática llegar a la verdad por simple observación; no obstante hay que poner cuidado especial en la verificación de la propiedad.

MALBA TAHAN
"El hombre que calculaba".

1. Escribe en cada caso la conclusión que se desprende de la información dada.

a) Todos los gerentes de empresa tienen auto propio.
Carlos Aparici es gerente de empresa.
....

b) Todos los días 29 la familia Capuccino come ñoquis al mediodía.
Mañana es 29 de agosto.
....

c) Martín, que es un muchacho de palabra, ayer rindió examen. Me había dicho que, si aprobaba, hoy iríamos al cine a la función de las 17 horas.
Son las 19.30 y yo sigo aburrida, esperándolo.
....

d) Cada vez que Mariana va al parque de diversiones, juega en la montaña rusa.
Mariana fue ayer al parque de diversiones.
....

2. Responde las preguntas a partir de la información dada.

Para solicitar la beca, es condición indispensable ser egresado de la facultad.

a) Mariana es egresada de la facultad. ¿Puede solicitar la beca?

b) Beatriz está en condiciones de solicitar la beca, ¿es egresada de la facultad?

c) Juliana no desea solicitar la beca, ¿es egresada de la facultad?

d) Verónica no es egresada de la facultad. ¿Puede solicitar la beca?

3. Indica en qué casos la conclusión se **deduce** de la información dada.

a) **Información:** Los días de tormenta nadie sale a la calle en este pueblo.
Hoy nadie ha salido a la calle.
Conclusión: Hoy es un día de tormenta.

b) **Información:** Los días de tormenta nadie sale a la calle en este pueblo.
Hoy es un día de tormenta.
Conclusión: Hoy nadie ha salido a la calle en este pueblo.

c) **Información:** Los días de tormenta nadie sale a la calle en este pueblo.
Hoy no es un día de tormenta.
Conclusión: Hoy todos han salido a la calle en este pueblo.

d) **Información:** Si Pepe Gómez juega, el seleccionado gana seguro.
El seleccionado perdió.
Conclusión: Pepe Gómez no jugó.

e) **Información:** Si Pepe Gómez juega, el seleccionado gana seguro.
Pepe Gómez no jugó.
Conclusión: El seleccionado perdió.

f) **Información:** Todos los varones de 2° C son de Boca.
Juan es de Boca.
Conclusión: Juan es alumno de 2° C.

g) **Información:** Todos los varones de 2° C son de Boca.
Juan es alumno de 2° C.
Conclusión: Juan es de Boca.

h) **Información:** Todos los varones de 2° C son de Boca.
Juan no es alumno de 2° C.
Conclusión: Juan no es de Boca.

4. Indica cuáles de las tres proposiciones, a), b), c), se deducen de la proposición dada.

Si $a = 5$ entonces $a^2 = 25$.

a) Si $a^2 = 25$ entonces $a = 5$.

b) Si $a \neq 5$ entonces $a^2 \neq 25$.

c) Si $a^2 \neq 25$ entonces $a \neq 5$.

5. Los señores Bertolotti, Méndez y Capurro son profesores en una escuela secundaria; uno de ellos da clase de historia, otro de geografía y otro de matemática. Ninguno da clase de dos asignaturas.

- El profesor de historia y el de geografía, dan ambos clase en 5° A.
- El profesor de matemática tiene más horas de clase que el de geografía.
- El señor Capurro tiene menos horas de clase que el señor Méndez.
- El profesor de matemática y el de historia dan clase en 2° C.
- El profesor Capurro no da clase en ningún curso en que da clase el profesor Méndez. Es decir, ellos no tienen alumnos comunes.

¿Podrías decirnos qué asignatura dicta cada profesor?

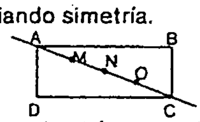
6. Las actividades de la tía Herminia

El lunes, la tía Herminia se encontró con su amiga Silvia y fueron juntas a tomar el té. Comieron masas con crema en cantidad suficiente. El mozo de la confitería se sorprendió por el buen apetito de las clientas. El martes hubo un té canasta a beneficio de la escuela a la que concurren los hijos de la tía Herminia. Además de tomar té, comió allí unas cuantas porciones de torta de crema. El miércoles fue el cumpleaños de Mercedita. No podía faltar la tía Herminia que,

por supuesto llegó a la hora del té para saborearlo con cañoncitos de crema.
La merienda del jueves fue sencilla: té con galletitas untadas con dulce de leche.
Siempre tan sobria, la tía Herminia consumió una lata de 1 kg de dulce.
Bombas de crema pastelera fue el alimento que acompañó el té del viernes.
El sábado por la tarde, presa de un ataque de hígado, concluyó muy segura:
— Es evidente que el té me hace mal al hígado.

• ¿Qué opinas de la conclusión de la tía Herminia?

7. Matías está estudiando simetría.
Al analizar la figura del rectángulo, dice:



— Considerando una simetría respecto de la diagonal **AC**, **A** es el simétrico de **A**, **C** es el simétrico de **C**, **O** es el simétrico de **O**, **M** es el simétrico de **M** y **N** es el simétrico de **N**. Por lo tanto, todo punto del rectángulo es simétrico de sí mismo.

• ¿Es correcto el razonamiento de Matías? ¿Por qué?

8. María Sol hace las siguientes observaciones:
$\sqrt{3}$ no es un número entero;
$\sqrt{5}$ no es un número entero;
$\sqrt{7}$ no es un número entero.
Luego concluye:
— Las raíces cuadradas de los números impares no son enteras.

• ¿Qué opinas de su conclusión?

9. Escribe, en cada caso, una conclusión que surja de razonar inductivamente a partir de la información dada.

a) Cada vez que Alicia comió frutillas, sufrió urticaria.
....

b) Las últimas cinco veces que hice torta, reemplacé la manteca por queso blanco, pero, en cada una de estas ocasiones, la torta se desarmó al desmoldarla.
....

c) Pablo mide los ángulos interiores de ocho cuadriláteros distintos y, en todos los casos, la suma de las amplitudes es 360°.
....

Con un poco de humor

Una señora toma un taxi. A poco de comenzar el viaje, el taxista comenta:
—Señora, no me hable, soy totalmente sordo, de manera que no puedo escuchar nada de lo que me dice. Lamentablemente he perdido mi audífono, con lo cual en estos días me siento totalmente aislado —concluyó el taxista.
Al escuchar esto, la pasajera hizo silencio y se quedó pensativa.
Sin embargo, al bajar del vehículo comprendió que el taxista la había engañado al decirle que era sordo.

• ¿Cómo se dio cuenta de esto la señora?

13 PARALELOGRAMOS

—¡Otra vez llegamos a la misma conclusión! ¿Todavía crees que es casualidad? —comenta Laura.

—No, no puede ser casualidad. Ya probamos con más de quince cuadriláteros diferentes y siempre observamos lo mismo. Debe ser una propiedad general —responde Ariel.

—Sí, pero ya sabemos que no podemos afirmarlo más que para los casos que vimos, aunque el número de pruebas haya sido muy grande —recuerda Laura. Y agrega: —¡Hasta que podamos justificarlo!

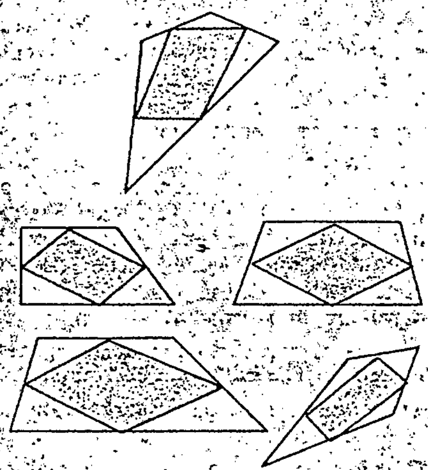
—¡Qué os ocurre, "genios matemáticos"! ¡Aquí estoy yo para salvaros de la desesperación! —interrumpe Carla, que llega en ese momento.

—Veamos si nos puedes ayudar, porque esto parece cosa de magia: dibujamos un cuadrilátero cualquiera, marcamos el punto medio de cada lado y la figura que obtenemos uniendo dichos puntos, parece que siempre es...

—¡No se lo digas! —lo detiene Laura—. ¡Que lo intente ella también, para ver si observa lo mismo!

—¡Sí, Laura tiene razón! Pero, por favor, investiga con distintos cuadriláteros: trapezoides, trapecios, romboides, etcétera... ¿Qué figura es el nuevo cuadrilátero?

PARALELOGRAMOS: DEFINICIÓN



Carla investiga con diferentes cuadriláteros convexos: un cuadrilátero general y cuadriláteros particulares, como el romboide, y distintos trapecios (escaleno, rectángulo e isósceles). Observa a la derecha su trabajo.

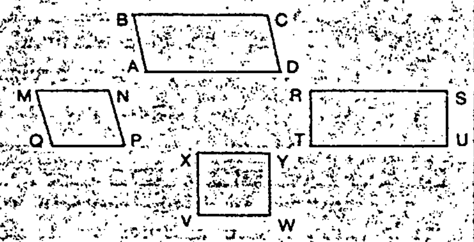
—En mis dibujos, he verificado que **los pares de lados opuestos del nuevo cuadrilátero son paralelos** —concluye Carla, después de cuidadosas comprobaciones.

—Éstas fueron también nuestras conclusiones: son **paralelogramos** —dice Laura—. Y, además, en algunos casos se obtuvieron **paralelogramos especiales**.

—Sí —se entusiasma Ariel, confiando en sus útiles de geometría—. El que se formó al unir los puntos medios de los lados del trapecio isósceles es un **rombo** y el construido con el romboide es un **rectángulo**.

Recordemos que:

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos paralelos.

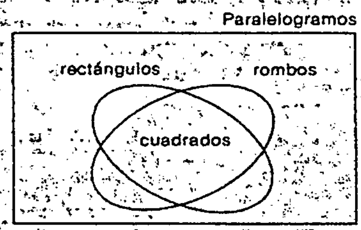


Entre los paralelogramos, podemos distinguir:

- **rombo**, que es aquél que tiene sus cuatro lados congruentes o de igual medida;
- **rectángulo**, que es aquél que tiene sus cuatro ángulos rectos.

En el caso de tener los cuatro lados congruentes y los cuatro ángulos rectos, se lo denomina **cuadrado**.

Por eso, decimos que el cuadrado es un caso particular del rombo y un caso particular del rectángulo.

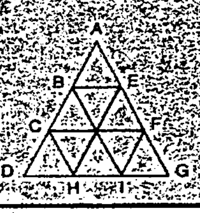


¿Qué cuadrilátero se forma uniendo los puntos medios de un paralelogramo general? ¿Y de un rombo? ¿Y de un rectángulo? ¿A qué cuadrilátero debes aplicarle este procedimiento para obtener un cuadrado?

Más adelante podrás justificar formalmente todas las conclusiones.

1. Nombra todos los paralelogramos de la figura que no son rombos.

DG // **CF** // **BE**
AD // **EH** // **FI**
AE // **BI** // **CH**
$|\overline{DH}| = |\overline{IG}| = |\overline{HI}|$



2. a) Marca tres puntos **A**, **B** y **C** no alineados. Utiliza regla y escuadra para construir: 1) la recta **AB**; 2) la recta paralela a **AB** que pasa por **C**; 3) la recta **AC**; 4) la recta paralela a **AC** que pasa por el punto **B**.

b) ¿Qué cuadrilátero has obtenido?

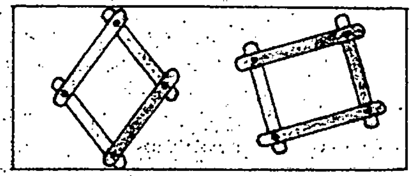
c) ¿Cómo debes ubicar **A**, **B** y **C** para que sea un rectángulo?

d) ¿Cómo debes ubicar **A**, **B** y **C** para que sea un rombo?

e) ¿Cómo debes ubicar **A**, **B** y **C** para que sea un cuadrado?

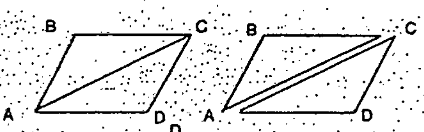
- Dibuja, en cada caso, el cuadrilátero correspondiente.

ÁNGULOS Y LADOS DEL PARALELOGRAMO

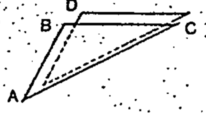


Con tiras de cartón y broches de dos patitas construye un paralelogramo articulado. Utiliza regla y transportador e investiga, para distintos movimientos de las varillas: a) ¿Cómo son entre sí los lados opuestos? b) ¿Cómo son entre sí los ángulos opuestos?

Agrega una tira de cartón como diagonal para fijar las varillas en una posición y dibuja en papel el paralelogramo obtenido; traza una diagonal y recorta los triángulos que quedan determinados. Superponiéndolos convenientemente, ¿qué puedes decir de los pares de lados opuestos, y de los pares de ángulos opuestos del paralelogramo original?

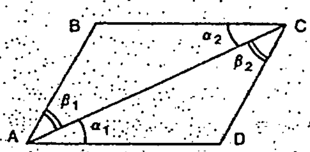


Habrás comprobado que son **congruentes**. ¿Será ésta una propiedad general?



Tratemos de reproducir para **cualquier** paralelogramo lo que has hecho al recortar los triángulos.

Consideremos entonces un paralelogramo **ABCD**. Tracemos la diagonal $\overline{AC}$ y comparemos los triángulos **ABC** y **ADC** que han quedado determinados:



$\overline{AC}$ es lado común a ambos triángulos.

$|\hat{\alpha}_1| = |\hat{\alpha}_2|$ por ser alternos internos entre paralelas.

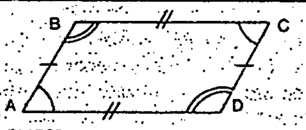
$|\hat{\beta}_2| = |\hat{\beta}_1|$ por ser alternos internos entre paralelas.

Si ABCD es paralelogramo, entonces:
$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

Los triángulos **ABC** y **ADC** tienen un lado y los dos ángulos adyacentes al lado, respectivamente congruentes; por lo tanto, son congruentes. Entonces, el tercer ángulo de cada triángulo y los otros dos lados, son también respectivamente congruentes. En la tabla de la derecha puedes ver la correspondencia entre lados y ángulos congruentes.

Tabla de lados		Tabla de ángulos	
ABC	ADC	ABC	ADC
AC	AC	β_1	β_2
BC	AD	α_2	α_1
AB	CD	B	D

Traza la diagonal **BD** y demuestra que los ángulos **A** y **C** también son congruentes.



Si ABCD es paralelogramo, entonces:

- $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$; $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$
- $|\hat{A}| = |\hat{C}|$; $|\hat{B}| = |\hat{D}|$

En todo paralelogramo son congruentes:

• los lados opuestos; • los ángulos opuestos.

3. El **MNPQ** es un paralelogramo. Si $|\hat{M}| = 37°$, calcula cada uno de los otros tres ángulos.

4. ¿Qué condición cumplen los ángulos adyacentes a un mismo lado en un paralelogramo? ¿Por qué?
Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, ¿qué puedes decir de los otros tres? ¿Por qué?

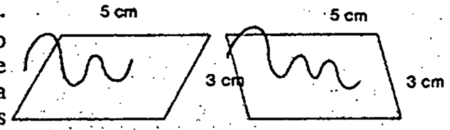
5. Construye el paralelogramo **PQRS**, sabiendo que $|\overline{PQ}| = 8$ cm; $|\overline{PS}| = 4$ cm y $|\hat{P}| = 70°$.
• Explica el procedimiento que has seguido.

6. Completa con "a veces", "siempre" o "nunca".
a) Si un cuadrilátero es paralelogramo, entonces es rectángulo.
b) Si un cuadrilátero es un rombo, entonces es un paralelogramo.
c) Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces es un cuadrado.
d) Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces es un rombo.

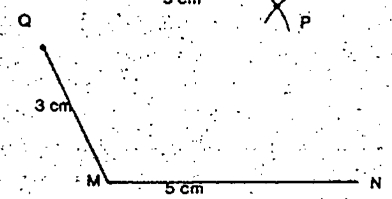
7. Efectúa lo pedido en el ejercicio anterior para las expresiones recíprocas de cada una de las dadas.
Ejemplo: a') Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces es un paralelogramo.

Ariel sabe que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Ahora se propone **construir un cuadrilátero cuyos dos pares de lados opuestos sean congruentes para determinar de qué cuadrilátero se trata.**

Para efectuar su investigación decide que su cuadrilátero tenga un par de lados opuestos de 5 cm cada uno y que los otros dos, midan 3 cm. Dibuja primero una figura para analizar los datos y se da cuenta de que hay muchas posibilidades (¿por qué?). Opta por una de ellas, como puedes ver a la derecha. Luego, procede así: dibuja un ángulo cualquiera **M** y sobre sus lados determina $\overline{MN}$ de 5 cm, y $\overline{MQ}$ de 3 cm.



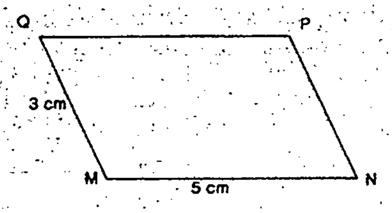
Fijando el compás en **N** y con un radio de 3 cm, traza un arco. Fijando el compás en **Q** y con un radio de 5 cm, traza otro arco. Ambos arcos se intersectan en **P**. Observa que, por construcción, **P** está a 3 cm de **N** y a 5 cm de **Q**. El cuadrilátero **MNPQ** cumple las condiciones pedidas.



El cuadrilátero obtenido es un paralelogramo.

Construye otros cuadriláteros cuyos dos pares de lados opuestos sean congruentes. ¿Qué obtienes en cada caso?

Parece que con las condiciones dadas, la figura que se obtiene es siempre un paralelogramo. Efectúa un razonamiento que te permita afirmar que esta propiedad es general.

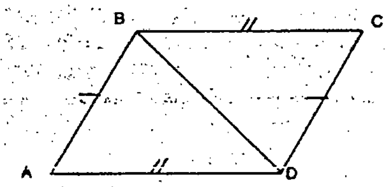


Si los pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.

Para demostrarlo, te sugerimos:

1) Considera un cuadrilátero **ABCD**, en el que $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ y $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$.
2) Traza una diagonal y explica las razones por las que los triángulos determinados son congruentes.

¿Por qué la congruencia de dichos triángulos es suficiente para afirmar que **AB** es paralela a **CD**, y que **BC** es paralela a **AD**?



Observa que la **propiedad demostrada es recíproca** de la demostrada en la página anterior.

8. Sabemos que **los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.**

a) Enuncia la propiedad recíproca.

b) Realiza un razonamiento que te permita demostrarla.

Para ello te sugerimos que, además de los datos, tengas en cuenta, las propiedades relativas a: 1) suma de ángulos interiores de un cuadrilátero; 2) ángulos determinados por dos rectas cortadas por una transversal.

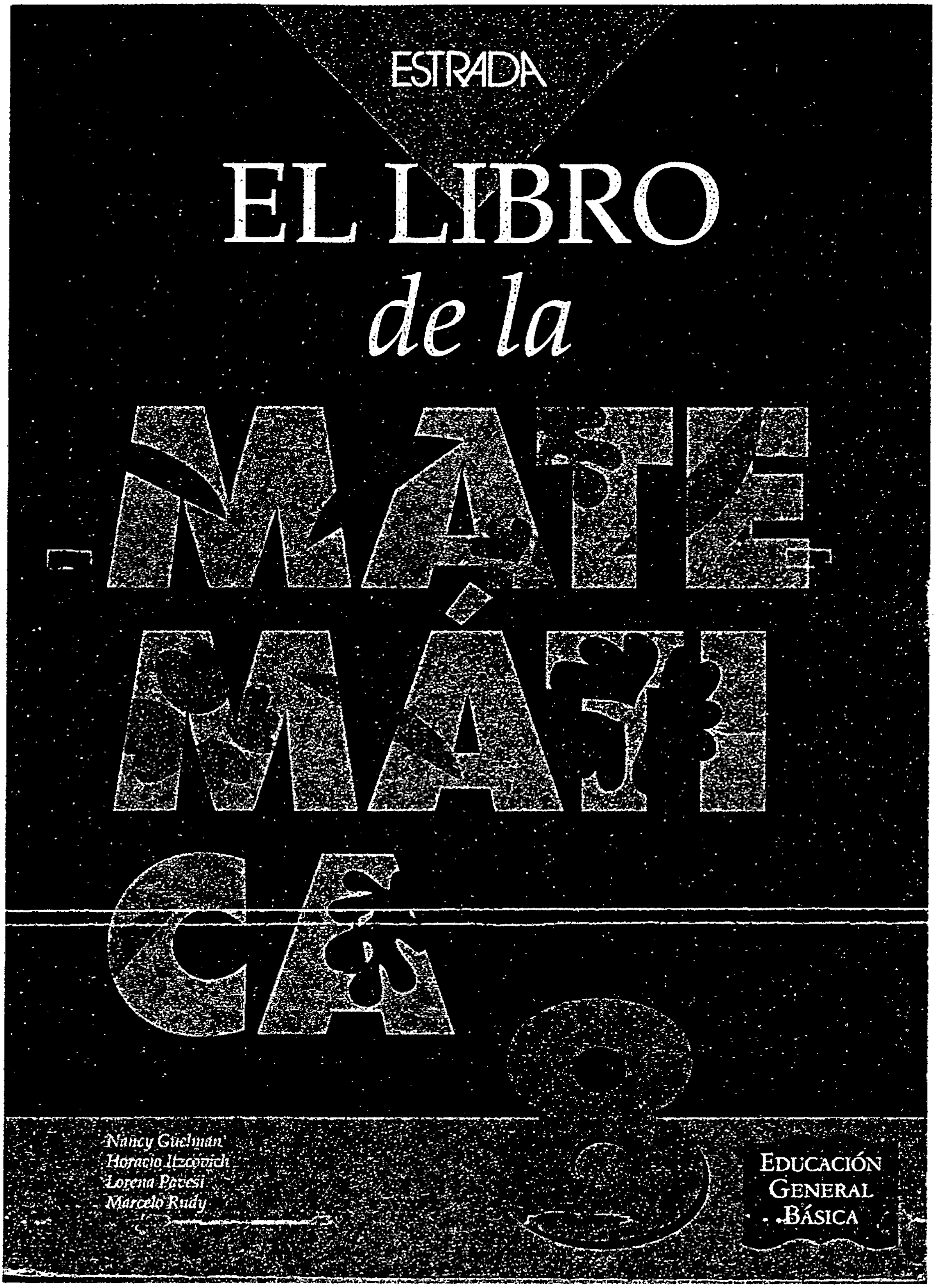
9. Sobre dos rectas paralelas, marca con regla o compás dos segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ de la misma longitud.

a) ¿Qué puedes decir de las rectas **AB** y **A'B'**?

b) ¿Cómo son entre sí las medidas de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$?

c) ¿Qué clase de cuadrilátero es el **ABB'A'**? ¿Por qué?

- Enuncia y justifica formalmente tu comprobación.


ESTRADA
EL LIBRO
de la
MATE
MÁTI
CA
8
Nancy Guelman
Horacio Itzcovich
Lorena Pavesi
Marcelo Rudy
EDUCACIÓN
GENERAL
BÁSICA

LXXVI

Índice

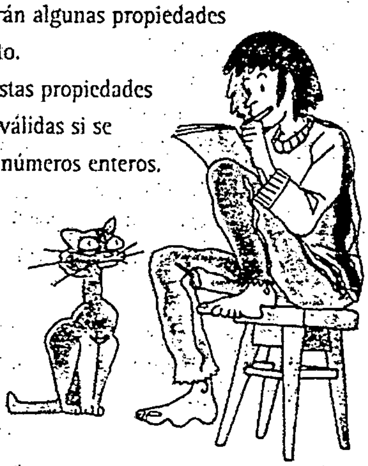
2

Las demostraciones

En este capítulo, se trabajará fundamentalmente con los números naturales.

Se investigarán algunas propiedades en este conjunto.

Muchas de estas propiedades serán también válidas si se consideran los números enteros.



PARA RESOLVER CON LO QUE SABEN

PROBLEMA 1

Determinen si los siguientes cálculos están bien hechos o no. Justifiquen en cada caso:

1.1) $4 \cdot 7 + 4 \cdot 13 = 80$

1.2) $17 \cdot 8 + 17 \cdot 6 - 17 \cdot 11 = 34$

1.3) $88 + 77 + 110 + 55 = 330$

PROBLEMA 2

2.1. Escriban tres números enteros positivos que sean múltiplos de 7. ¿Habrá alguna forma de escribir todos los múltiplos de 7 positivos?

2.2. Escriban todos los números pares positivos. ¿Pudieron escribirlos a todos?

2.3. Escriban todos los números enteros impares. ¿Pudieron escribirlos a todos?

ACERCA DE LOS PROBLEMAS 1 Y 2

La propiedad aquí utilizada es la propiedad distributiva en sus dos aspectos:

- $a\,(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a \cdot b + a \cdot c = a\,(b + c)$

1 **1.1.** Para hacer la cuenta: $4 \cdot 7 + 4 \cdot 13$, se puede efectuar: $4 \cdot 7 = 28$

$4 \cdot 13 = 52$

Y luego $28 + 52 = 80$. O sea que el resultado propuesto es correcto.

- Otra forma podría ser:

$4 \cdot 7 + 4 \cdot 13 = 4 \cdot (7 + 13) = 4 \cdot 20 = 80$ y se llega a lo mismo.

1.2. En este caso, también podría extraerse factor común:

$17 \cdot (8 + 6 - 11) = 17 \cdot 3 = 51$. O sea que el resultado propuesto es incorrecto.

1.3. Resuelvan ustedes este punto.

2 **2.1.** ¿Encontraron tres múltiplos de 7? Seguramente que sí. Igualmente, estos son algunos posibles: 14, 700 y 2394.

Si se desea escribir muchos múltiplos positivos de 7, la lista será así:

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, etcétera.

Es evidente que escribir **todos** los múltiplos positivos de 7 resulta imposible: no alcanza una vida, sería interminable, pues son infinitos. Se requiere, entonces, encontrar una forma de expresar la totalidad de esos números.

Los números de la lista anterior son múltiplos de 7, pues:

$7 = 7 \cdot 1$	$28 = 7 \cdot 4$
$14 = 7 \cdot 2$	$35 = 7 \cdot 5$
$21 = 7 \cdot 3$	Completen los que faltan.

A partir de esto, se puede afirmar que cualquier múltiplo positivo de 7 se escribe como 7 multiplicado por un número natural. Y esto se puede escribir así:

"Si a es natural y múltiplo de 7, $a = 7 \cdot k$ donde k es cualquier número natural."

De esta manera, si $k = 1$, se obtiene $a = 7$;

si $k = 2$, se obtiene $a = 14$;

si $k = 3$, se obtiene $a = 21$, etcétera.

CUESTIÓN: ANALICEN ESTE RAZONAMIENTO: SI $k = \frac{2}{7}$, COMO $2 = 7 \cdot k$, ENTONCES, 2 ES MÚLTIPLO DE 7. ¿ES CORRECTO? ¿POR QUÉ?

CUESTIÓN: DECIDAN SI LOS SIGUIENTES NÚMEROS SON MÚLTIPLOS DE 7: 141; 327; 1234; 700000.

2.2. Los números positivos pares son 2; 4; 6; 8; 10; etc. Nuevamente, si se quiere escribirlos a todos, es imposible. Si se quiere encontrar una forma de expresar todos los números pares, se necesita observar bien qué tienen ellos en común.

Los números pares son múltiplos de 2:

$$2 = 2 \cdot 1$$
$$4 = 2 \cdot 2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$8 = 2 \cdot 4, \text{ etcétera.}$$

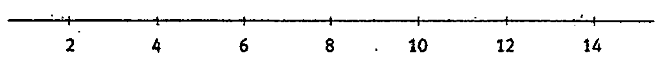
Resulta entonces:

Si b es un número positivo par, $b = 2 \cdot n$ con n natural.

Para saber si un número de varias cifras es par, existe una forma más económica que escribirlo como $2 \cdot n$ con n natural. Basta saber si termina en 0, 2, 4, 6 u 8. ¿Se les ocurre por qué?

2.3. ¿De qué manera se podrían representar todos los números positivos impares?

Si se ubican algunos pares en la recta numérica:



¿En dónde ubicarían los impares?

CUESTIÓN: INDIQUEN TRES IMPARES POSTIVOS.

Como los impares positivos se encuentran entre los pares positivos, si se escriben los números pares en la forma $2 \cdot n$, entonces:

Si c es un número positivo impar, $c = 2 \cdot n + 1$ con n natural o cero.

Si $n = 0$, se obtiene $c = 1$;
si $n = 1$, se obtiene $c = 3$;
si $n = 2$, se obtiene $c = 5$, etcétera.

CUESTIÓN: ¿QUÉ OCURRIRÍA SI NO SE INCLUYE EL VALOR 0 PARA n?

Algunas demostraciones

PARA RESOLVER CON LO QUE SABEN

PROBLEMA 3

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Intenten justificar la decisión tomada.

3.1. La suma de tres números naturales consecutivos es par.

3.2. La suma de dos números naturales consecutivos es un número impar.

3.3. El producto de un número natural por sí mismo es mayor que el número.

3.4. Todo número natural multiplicado por mil es mayor que el producto del número por sí mismo.

3.5. Todo número natural multiplicado por su consecutivo da como resultado un número par.

ACERCA DEL PROBLEMA 3

3.1. Para resolver esta parte, es posible comenzar probando con tres números consecutivos que cumplan con el enunciado. Por ejemplo, los números 1, 2 y 3. Al sumarlos, se obtiene un número par.

Si se eligen 3, 4 y 5, al sumarlos se obtiene 12, que también es par.

CUESTIÓN: ENCUENTREN OTROS TRES NÚMEROS CONSECUTIVOS CUYA SUMA SEA PAR.

Pero si se eligen los números 2, 3 y 4, el resultado es 9 que no es par.

CUESTIÓN: BUSQUEN OTROS DOS EJEMPLOS EN LOS QUE NO SE CUMPLA ESTE ENUNCIADO.

Como se ha encontrado un ejemplo (y se podrían haber encontrado varios) donde la suma de tres números consecutivos NO es un número par, es posible asegurar que el primer enunciado es FALSO.

Es decir, basta un ejemplo que **NO** cumpla lo que establece un enunciado para afirmar que el enunciado es **FALSO**.
A cualquiera de estos ejemplos, se los llama **CONTRAEJEMPLO**. Encontrando un contraejemplo, se **DEMUESTRA** la falsedad de un enunciado.

3.2. Para determinar si la suma de dos números naturales consecutivos es un número impar, se puede comenzar probando con pares de números consecutivos:

3 y 4 son consecutivos, y $3 + 4 = 7$. Efectivamente, el número 7 es impar.

24 y 25 son consecutivos, y $24 + 25 = 49$. Este es impar.

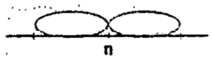
1234 y 1235 son consecutivos y $1234 + 1235 = 2469$. También este es impar.

Con estos ejemplos, es posible sospechar que el enunciado es verdadero.

Pero ¿será cierto que vale esta propiedad para **todos** los números naturales?

Como resultaría imposible escribir **todas** las sumas de dos naturales consecutivos y comprobar, una por una, que el resultado sea impar, es necesario encontrar un modo de notación para representar a todas las sumas de un natural y su consecutivo.

Una posibilidad es designar a todos los números naturales con una letra, por ejemplo la n. ¿Cómo designarían al consecutivo, o sea, al que le sigue a n? ¿Y al anterior?



Evidentemente, si n es natural, el que le sigue será $n + 1$ y el anterior será $n - 1$.

Entonces, si se quiere saber la forma en que puede escribirse la suma de un natural cualquiera y su consecutivo, dicha forma será:

$$n + n + 1 = 2n + 1 \text{ (pues } n + n = 2n\text{)}$$

Según lo visto anteriormente $2n + 1$, es la expresión de un número impar, o sea que si se suma un natural con su consecutivo, el resultado es un número impar. Por lo tanto, el enunciado de este problema es verdadero.

Se advierte

[illegible]

3.3. El enunciado de este problema dice: "El producto de un número natural por sí mismo es mayor que el número".

Muchos ejemplos cumplen este enunciado.

Por ejemplo: $5 \cdot 5 > 5$ y $10 \cdot 10 > 10$.

¿Se puede afirmar que este enunciado es verdadero?

En realidad, todos los números naturales, salvo el 1, cumplen con el enunciado.

Sin embargo, con un solo número que no cumpla la propiedad alcanza para decir que el enunciado es falso.

CUESTIÓN: ¿QUÉ AGREGARÍAN AL ENUNCIADO PARA QUE RESULTE VERDADERO?

3.4. Para el enunciado: "todo número natural multiplicado por mil es mayor que el producto del número por sí mismo", se pueden encontrar muchos ejemplos que lo cumplen como los números 2, 4, 9, 12, 28 y 37.
Esto haría pensar que es verdadero. ¿Qué ocurrirá con el 1000, y con el 1100? ¿Es cierto esto?
Basta con un contraejemplo para demostrar la falsedad del enunciado.

3.5. El enunciado de este problema dice: "Todo número natural multiplicado por su consecutivo es par". Probemos con varios ejemplos:

$3 \cdot 4 = 12$ que es par,
$10 \cdot 11 = 110$ que es par,
$123 \cdot 124 = 15252$ que es par.

CUESTIÓN: ¿EXISTIRÁ ALGÚN CONTRAEJEMPLO Y NO SE HA PODIDO ENCONTRAR?

Si se supone que no hay ningún contraejemplo, se deberá intentar demostrarlo:
Designando con la letra **n** a cualquier número natural, su consecutivo será **n + 1**.
Hay que determinar si el producto **n (n + 1)** es par.

Como ambos números son consecutivos, seguro que uno es par y el otro impar.

Si **n** es par, entonces se puede escribir **n = 2 · k** con **k** natural.

Entonces, **n + 1** será impar, por lo tanto, **n + 1 = 2 · k + 1** con **k** natural.

Sin perder de vista que se busca saber si **n (n + 1)** es par, este producto es posible escribirlo como: **n (n + 1) = 2k (2k + 1)**

Pero este último producto podemos escribirlo **2 [k (2k + 1)]** si se aplica la propiedad asociativa. Se obtiene entonces que, al multiplicar un natural por su consecutivo, el resultado es 2 por "algo", siendo ese "algo" un número natural, ya que es el resultado de sumas y productos de números naturales. Por lo tanto **n (n + 1) = 2 · h** con **h** natural, o sea que es par.
Demuestren este enunciado en el caso de que **n** sea impar y de que **n + 1** sea par. ¿En qué varía la demostración?
En este caso para completar la demostración se requiere verificar que la propiedad sea cierta en cada caso.

Para demostrar una propiedad es necesario considerar todos los casos posibles. Dicha demostración sólo estará terminada al haberse verificado que la propiedad es cierta en cada uno de los casos.

PARA RESOLVER CON LO QUE SABEN

PROBLEMA 4

Si se duplica uno de los lados de un rectángulo, dejando el otro fijo, ¿se duplica su área?

PROBLEMA 5

Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifiquen la respuesta.

5.1. 100 tiene 6 divisores exactamente.

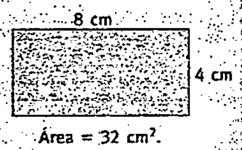
5.2. 169 es primo.

5.3. Si un número es múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6.

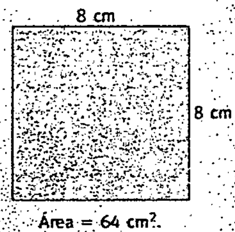
5.4. Si un número es múltiplo de 6, entonces es múltiplo de 3.

ACERCA DE LOS PROBLEMAS 4 Y 5

4 Si se considera un rectángulo de 4 cm x 8 cm, tenemos un área de 32 cm^2.



Si se duplica uno de los lados y se deja fijo el otro se obtiene el siguiente rectángulo:



Si se comparan ambas áreas, la del segundo rectángulo es el doble que la del primero. Para este rectángulo, al duplicar uno de sus lados y dejar fijo el otro, se duplicó el área.

CUESTIÓN: ¿SERÁ CIERTO PARA CUALQUIER RECTÁNGULO?

Se debe representar cualquier rectángulo con las medidas de sus lados: a y b.
El área del rectángulo será entonces $a \cdot b$.
Si se duplica uno de los lados, por ejemplo, el lado a, se obtiene un nuevo rectángulo cuyos lados miden $2 \cdot a$ y b.
El área del primer rectángulo es $a \cdot b$.
El área del segundo rectángulo es $(2 \cdot a) \cdot b$.
Si se asocia de manera conveniente, esta área queda $2 \cdot (a \cdot b)$ que es el doble del área $a \cdot b$.
O sea que este enunciado es verdadero.

CUESTIÓN: ¿CÓMO VARÍA EL ÁREA SI SE DUPLICAN AMBOS LADOS?

29

5 5.1. Seguramente han podido encontrar más de 6 divisores para 100. Por ejemplo, algunos podrían ser 1; 2; 4; etcétera.

¿Cuántos divisores tiene 100 exactamente?

Para recordar: [illegible]

¿Cómo se hace para encontrar todos los divisores de 100?

Serán todos los números naturales c que verifiquen que $100 = c \cdot k$ con k natural.

Por ejemplo:

$$100 = 1 \cdot 100$$
$$100 = 2 \cdot 50$$
$$100 = 4 \cdot 25$$

¿Cuántos divisores de 100 están "a la vista" en los cálculos anteriores?

CUESTIÓN: SI a ES DIVISOR DE b, ENTONCES, ¿b SERÁ MÚLTIPLO DE a? ¿POR QUÉ?

5.2. ¿Recuerdan qué es un número primo?

Un número natural m es primo si sólo tiene 2 divisores positivos: 1 y m.

¿Cuáles son los divisores de 169? Si son únicamente los números 1 y 169, el 169 será primo. Para no hacer todas las cuentas se podría empezar con el 2, como 2 no es divisor de 169, tampoco lo serán todos los números pares. ¿Ocurrirá lo mismo con el 3?

5.3. Algunos múltiplos de 3 son: 3, 6, 9.

9 es múltiplo de 3, pero no lo es de 6, el enunciado del problema es falso, pues se encontró un contraejemplo.

5.4. Si un número natural n es múltiplo de 6, existe un número entero positivo k que cumple: $n = 6 \cdot k$ por ejemplo $18 = 6 \cdot 3$

$30 = 6 \cdot 5$

O sea que n puede ser pensado como:

$$n = (3 \cdot 2) \cdot k \quad \text{(ya que } 3 \cdot 2 = 6\text{)}$$

Usando la propiedad asociativa del producto, podemos escribir

$n = 3 \cdot (2 \cdot k)$ o sea que n es múltiplo de 3.

Más precisamente, llamando $j = 2 \cdot k$ obtenemos que $n = 3 \cdot j$

Se ha probado que el enunciado del problema es verdadero.

Piensen ahora en la veracidad o no de este enunciado:
Si 5 es divisor de los números a y b, entonces es divisor de la suma $a + b$.
Si 5 es divisor de a, entonces $a = 5 \cdot n$, con n natural.
Si 5 es divisor de b, entonces $b = 5 \cdot m$, con m natural.
Luego vale que $a + b = 5 \cdot n + 5 \cdot m = 5 \cdot (n + m)$ o sea que $a + b$ es múltiplo de 5.
Más precisamente, llamado $k = m + n$, se obtiene que la suma de ambos números es igual a $5 \cdot k$, con k entero. Es decir que 5 es divisor de la suma de los números a y b.

PROBLEMA 6

Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:
Si se elige un número de una cifra y se lo eleva al cuadrado, luego se suman las cifras del resultado obtenido y a este último número se le suma el número elegido, el último resultado siempre es menor que 21.

6 Veamos cómo determinar la veracidad o falsedad de la afirmación enunciada en el problema 6.

Por ejemplo: Si se elige el 4. Al cuadrado se obtiene 16. Luego $1 + 6 = 7$. Finalmente, $7 + 4 = 11 < 21$. Por lo tanto, el número 4 lo cumple.

CUESTIÓN: ¿LO CUMPLIRÀN TODOS LOS NÚMEROS DE UNA CIFRA?

- Alguien dijo que basta con probar para 9, que es el más grande de todos los números de una cifra:

$9^2 = 81$ $\quad$ $8 + 1 = 9$ $\quad$ Por último, $9 + 9 = 18 < 21$

Entonces como el 9 lo cumple, y es el más grande, todos los números de una cifra lo verifican. ¿Están de acuerdo con este razonamiento?

Probemos con el 5:

$5^2 = 25$ $\quad$ $2 + 5 = 7$. $\quad$ Por último, $7 + 5 = 12 < 21$, se cumple.

Ahora el 6:

$6^2 = 36$ $\quad$ $3 + 6 = 9$. $\quad$ Luego, $9 + 6 = 15 < 21$, se cumple.

Para el 8:

$8^2 = 64$ $\quad$ $6 + 4 = 10$ $\quad$ y $\quad$ $10 + 8 = 18 < 21$, se cumple.

> CUESTIÓN: VERIFIQUEN USTEDES PARA EL 0, EL 1, EL 2 Y EL 3, SI TAMBIÉN LO CUMPLEN.

Queda el 7:

$7^2 = 49$ $\quad$ $4 + 9 = 13$ y $\quad$ $13 + 7 = 20 < 21$

El 7 también lo cumple.

¿Quedará demostrado el enunciado con lo hecho hasta ahora?

Alguien dice que mejor es representar a todos los números de una cifra mediante una escritura. ¿Ustedes qué opinan?

¿Será necesario que aparezcan las letras indicando los números?

En este problema no fue necesario recurrir a representaciones (mediante letras) de todos los números. Como eran pocos, se pudo probar con cada uno de ellos. Al ser válido el enunciado para cada número del 0 al 9, el enunciado resultó cierto, pues se establecía solamente para los números de una cifra.

Ejercicios

1 a) ¿Será cierto que cualquier número natural puede escribirse como suma de números primos?
Por ejemplo: $6 = 2 + 2 + 2$.
b) ¿Cuáles son los números naturales que se pueden escribir como suma de 2 números primos?
Por ejemplo $5 = 2 + 3$.
Ensayen con los números del 4 al 20.

2 Decidan si estas expresiones son iguales o no colocando = o ≠.

a) $3 \cdot a + 3 \cdot b + 3 = 3 \cdot (a + b + 3)$

b) $6 \cdot a + 5 \cdot b - 3 \cdot b - 4 \cdot a = 2 \cdot (a + b)$

c) $a : 2 - b : 2 = \frac{1}{2} \cdot (a - b)$

d) $a : 2 + b : 4 + c = \frac{1}{2} \cdot (a + \frac{b}{2} + 2 \cdot c)$

e) $\frac{a}{3} + 1 - \frac{b}{6} = 3 \cdot (a + \frac{1}{3} - 2 \cdot b)$

3 Decidan, para cada enunciado, cuál es la expresión que lo representa correctamente.
a) La suma del triple de un número entero k y 3.

$3 \cdot (k + 3)$
$3 \cdot k + 3$
$3 \cdot k + 3 \cdot 3$

b) El consecutivo del doble de la diferencia entre un número entero k y 3.

$(2 \cdot k - 3) + 1$
$2 \cdot k - 3 + 1$
$2 \cdot (k - 3) + 1$

c) El producto del anterior de la mitad de un número entero k y 3.

$(k - 1): 2 \cdot 3$
$(k : 2 \cdot 3) - 1$
$(k : 2 - 1) \cdot 3$

4 Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifiquen la respuesta.

a) La diferencia entre un número natural par y un número natural impar es un número impar.

b) La suma entre un número natural y 10000 es mayor que el doble del número.

c) La suma entre el doble de un número natural y el cuádruplo de ese mismo número es un número par.

d) Todo número natural impar más su triple da como resultado un número par.

e) El producto de dos números naturales es siempre mayor que alguno de los dos.

f) La mitad de un número natural par más el consecutivo del número da como resultado un número par.

g) El doble del anterior de un número natural más el consecutivo del número es múltiplo de 3.

5 Traduzcan las siguientes expresiones simbólicas a lenguaje coloquial.
Por ejemplo:

$(n-3): 2$

también se puede expresar así: "la mitad de la diferencia entre un número natural n y 3".

a) $n : 2 - 3$
b) $(2 \cdot t + 1): 4$
c) $3 \cdot k \cdot (k + 1)$
d) $2 \cdot (h - 1)$

6 Calculen mentalmente:

a) $32 \cdot 5 + 5 \cdot 18 =$
b) $231 : 3 + 69 : 3 =$
c) $99 : 2 + 1 : 2 =$
d) $874 : 2 - 74 : 2 =$

7 Sabiendo que $a + b = 12$, resuelvan:

a) $-3 \cdot a + (-12) + 5 \cdot (a + b) - 3 \cdot b =$
b) $9 \cdot a + 4 \cdot b - 5 \cdot a - b - a =$
c) $6 \cdot a + 2 \cdot (a + b - c) + 2 \cdot (c - 3 \cdot a) =$

8 Calculen:
a) El triple de la diferencia entre 5 y 3.
b) La diferencia entre el triple de 5 y 3.
c) El cociente entre la mitad de 16 y 4.
d) La mitad del cociente entre 16 y 4.
e) La cuarta parte del consecutivo de 19.
f) El producto entre el anterior de 12 y 8.
g) El anterior del producto entre 12 y 8.

9 Si se duplica la altura de un triángulo, ¿se duplica su superficie?

10 Si n es un número entero, escriban:
a) El doble de su consecutivo.
b) El consecutivo de su doble.
c) La tercera parte de su anterior.
d) La mitad de su triple.
e) La suma entre el doble de n y 2.
f) El doble de la suma de n y 2.

11 Decidan si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifiquen las respuestas.
a) Si un número es múltiplo de 6 y de 2, entonces es múltiplo de 12.

b) Si 4 es divisor de a y 4 es divisor de b, entonces 4 es divisor de $a - b$.

c) Si 5 es divisor de a y 5 es divisor de b, entonces 5 es divisor de $a \cdot b$.